گروه مهندسی ثمین

جزوه کمک آموزشی نکات و خلاصه درس:

ریاضی

(فصل ششم)

مقطع تحصیلی:

دوره اول متوسطه

پایه:

نهم

تهیه و تنظیم:

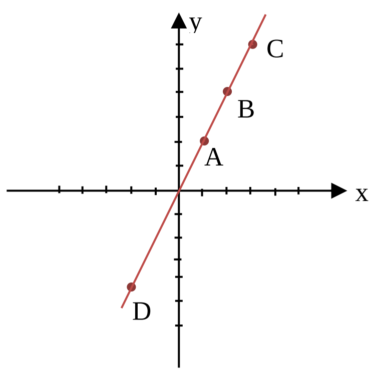
مرکز تحقیقات مهندسی ثمین

فصل ششم: خط و معادله‌های خطی

درس اول: معادلهٔ خط

مفهوم معادله خطی:

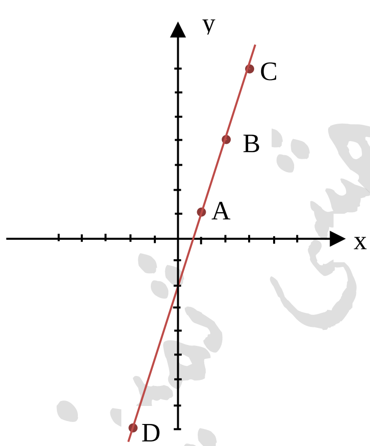
به مختصات نقاط مقابل دقت کنید. $A=\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}\ B=\begin{bmatrix}۲\\۴\end{bmatrix}\ C=\begin{bmatrix}۳\\۶\end{bmatrix}\ D=\begin{bmatrix}-۲\\-۴\end{bmatrix}$



در همه آن‌ها، عرض نقطه، دو برابر طول آن نقطه است. یعنی در همه نقطه‌ها رابطه یکسانی بین طول و عرض وجود دارد (طول × ۲ = عرض) اکنون آن‌ها را در یک صفحه مختصات رسم می‌کنیم. اگر آن‌ها را به هم وصل کنیم یک خط ایجاد می‌شود (همه آن‌ها روی یک خط هستند).

اکنون به مختصات نقاط زیر دقت کنید.

$$A=\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix}\ B=\begin{bmatrix}۲\\۴\end{bmatrix}\ C=\begin{bmatrix}۳\\۷\end{bmatrix}\ D=\begin{bmatrix}-۲\\-۸\end{bmatrix}$$



در همه این نقاط، عرض نقطه، از سه برابر طول نقطه، ۲ واحد کم‌تر است و در این‌جا هم، یک رابطه یکسان بین طول و عرض نقطه‌ها وجود دارد (۲- طول × ۳ = عرض). اکنون آن‌ها را در یک صفحه مختصات رسم می‌کنیم. مشاهده می‌کنیم آن‌ها روی یک خط قرار دارند.

نتیجه گیری: اگر بین طول و عرض چند نقطه یک رابطه و نسبت مساوی وجود داشته باشد، آن نقاط روی یک خط قرار دارند.

مثال: در هر بخش، مشخص کنید آیا نقاط داده شده روی یک خط قرار دارند یا خیر.

الف) $A = \begin{bmatrix} ۵ \\ -۱۰ \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -۴ \\ +۸ \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -۳ \\ +۶ \end{bmatrix}$

بله. زیرا در همه نقاط، رابطهٔ (طول × ۲- = عرض) بین طول و عرض وجود دارد.

ب) $A = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۵ \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۰ \end{bmatrix}$

خیر. زیرا هیچ رابطه منظمی بین طول و عرض همه نقاط وجود ندارد.

ج) $A = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۲ \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۳ \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -۵ \\ -۲ \end{bmatrix}$

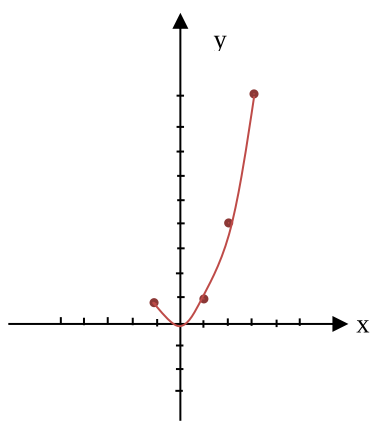
بله. زیرا در همه نقاط، رابطهٔ (۱+عرض× ۳= طول) بین طول و عرض وجود دارد است.

تذکر:

در حالتی که بین طول و عرض نقطه‌ها رابطه توانی وجود داشته باشد، نقاط روی یک خط قرار نمی‌گیرند. به نقاط زیر دقت کنید. در همه آن‌ها عرض هر نقطه برابر با مربع طول نقطه (^{۲}(طول)=عرض)است، و روی یک خط قرار نمی‌گیرند.

$A = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۹ \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} -۱ \\ +۱ \end{bmatrix}$

$۱^۲=۱$ $۲^۲=۴$ $۳^۲=-۹$ $(-۱)^۲ = +۱$



پس دقت کنید در این درس وقتی می‌گوییم بین طول و عرض نقاط، یک رابطه وجود دارد، این رابطه نباید به صورت توانی باشد (یعنی توان در آن به کار نرفته باشد) و فقط با ضرب و جمع و تفریق بتوان بین طول و عرض، رابطه پیدا کرد.

- ❖ هر معادله به صورت کلی y=ax+b معادلهٔ یک خط است؛ زیرا در صورتی که تمام پاسخ های آن معادله را به صورت نقطه روی دستگاه مختصات نمایش دهیم، شکل یک خط به دست می آید. به همین دلیل می گوییم x و y با هم رابطهٔ خطی دارند. دقت کنید که معادلهٔ بالا بیشمار جواب دارد ولی اتحاد نیست.
- ❖ y=ax صورت کلی معادله خط هایی است که از مبدأ مختصات می گذرند.

پیدا کردن نقاط از روی معادله خط:

گفته شد که به رابطهٔ بین طول و عرض نقاط روی یک خط، معادله خط می‌گوییم.

در ابتدای این فصل در چند مثال با داشتن مختصات نقاط، خط را رسم کردیم. حال اگر در معادله یک خط به جای x ها (طول نقاط خط) اعدادی مانند ۰، ۱، ۲، ۳ یا ۱-، ۲-، ۳- و... قرار دهیم، عرض نقاط بدست می آید و به این ترتیب مختصات یک نقطه به دست می‌آید. این کار را می‌توان برای عرض‌ها هم انجام داد، یعنی اگر در معادله یک خط به جای y (عرض نقطه‌های خط) عدد دلخواه قرار دهیم، طول نقطه به دست می‌آید.

مثال: معادله خطی به صورت $۳x+۲y=۱۲$ است. در این خط، مختصات نقطه‌ای که طول آن ۲ است را به دست آورید.

مطابق آن‌چه گفته شد، کافی است که به جای (x) در معادله خط ۲ قرار دهیم تا عرض نقطه به دست آید:

$$۳x + ۲y = ۱۲ \xrightarrow{x=۲} ۳\times۲+۲y = ۱۲ \Rightarrow ۶ + ۲y = ۱۲ \Rightarrow ۲y = ۶-۱۲=۶ \Rightarrow y=۳$$

یعنی عرض نقطه ۳ است، پس مختصات این نقطه $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ است.

تشخیص قرار داشتن نقطه روی خط:

اگر نقطه‌ای روی خط قرار داشته باشد، با قرار دادن طول و عرض آن به جای x و y در معادلهٔ خط، باید تساوی برقرار باشد.

مثال: آیا نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۵ \\ ۴ \end{bmatrix}$ روی خط $۳x = ۲y + ۷$ قرار دارد؟

به جای x طول نقطه، یعنی ۵ و به جای y ، عرض نقطه، یعنی ۴ را قرار می‌دهیم:

چون تساوی برقرار است، پس نقطه روی خط است. $\underbrace{(۵)\times۳}_{۱۵} = \underbrace{۷+(۴)\times۲}_{۱۵} \Rightarrow$

مثال: آیا خط $۴y=x+۲$ از نقطه $\begin{bmatrix}-۳\\۲\end{bmatrix}$ عبور می‌کند؟

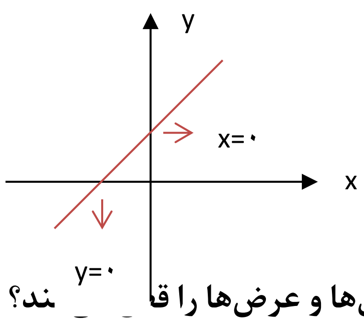
وقتی خطی از نقطه‌ای عبور می‌کند، یعنی در واقع نقطه روی خط قرار دارد. در واقع در این مثال، مانند مثال قبل می‌خواهیم ببینیم نقطه $\begin{bmatrix}-۳\\۲\end{bmatrix}$ روی خط $۴y=x+۲$ قرار دارد یا خیر. به جای y مقدار ۲ و به جای x، مقدار ۳- را قرار می‌دهیم:

چون تساوی برقرار نیست، پس نقطه روی خط قرار ندارد.

$$\underbrace{۴\times(۲)}_{۸} = \underbrace{(-۳)+۲}_{-۱}$$

مختصات محل برخورد خط با محورهای مختصات:

نقطه‌ای که خط محور، طول (xها) را قطع می‌کند، $y=۰$ است و نقطه‌ای که خط محور عرض‌ها (yها) را قطع می‌کند $x=۰$ است.



مثال: خطی به معادله $۶y=۳x-۱۲$ داریم. این خط در چه نقاطی محور طول‌ها و عرض‌ها را قطع می‌کند؟

طبق آن‌چه گفته شد، در نقطه‌ای که خط محور طول‌ها را قطع می‌کند، $y=۰$ است. پس با قرار دادن $y=۰$ در معادله خط، می‌توانیم طول نقطه را به دست آوریم:

$$۶y=۳x-۱۲ \xrightarrow{y=۰} ۶\times۰=۳x-۱۲ \Rightarrow ۰=۳x-۱۲ \Rightarrow -۳x=-۱۲ \Rightarrow x=\frac{-۱۲}{-۳}=۴$$

پس این خط در نقطه $\begin{bmatrix}۴\\۰\end{bmatrix}$ محوط طول‌ها را قطع می‌کند.

هم‌چنین می‌دانیم جایی که خط محور عرض‌ها را قطع می‌کند، $x=۰$ است، پس با قرار دادن $x=۰$ در معادله خط می‌توانیم عرض این نقطه را به دست آوریم:

$$۶y=۳x-۱۲ \xrightarrow{x=۰} ۶y=۳\times۰-۱۲ \Rightarrow ۶y=-۱۲ \Rightarrow y=\frac{-۱۲}{۶}=-۲$$

یعنی عرض این نقطه ۲- است، پس مختصات این نقطه $\begin{bmatrix}۰\\-۲\end{bmatrix}$ است.

رسم خط

برای پیدا کردن نقاط خط، می‌توانیم اعداد دلخواهی را به جای x یا y قرار دهیم و مختصات نقاط را به دست آوریم. اما برای راحتی کار بهتر است یک بار به x مقدار صفر بدهیم و y را به دست آوریم و یک بار به y مقدار صفر بدهیم و x را به دست آوریم.

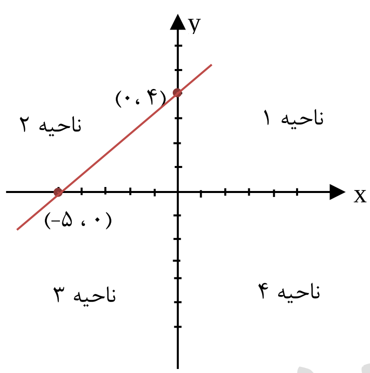
مثال: خطی به معادله ۵y = ۴x+۲۰، از کدام ناحیه صفحه مختصات عبور نمی‌کند؟

برای جواب دادن به این سئوال بهترین کار این است که خط را رسم کنیم:

$$x=۰ \Rightarrow ۵y=۴\times(۰)+۲۰ \Rightarrow ۵y=۲۰+۰ \Rightarrow ۵y=+۲۰ \Rightarrow y=+۴ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۰ \\ +۴ \end{bmatrix}$$

$$y=۰ \Rightarrow ۵\times(۰)=۴x+۲۰ \Rightarrow ۰=۴x+۲۰ \Rightarrow -۴x=+۲۰ \Rightarrow x=-۵ \Rightarrow \begin{bmatrix} -۵ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

این خط از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند.



مثال : از برخورد خط x − ۲y = -۶ با محورهای مختصات، یک مثلث ایجاد می‌شود. مساحت این مثلث را محاسبه کنید.

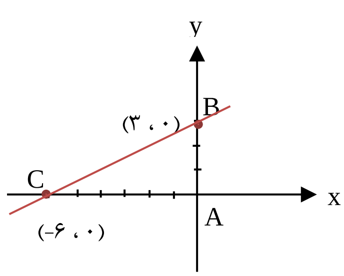
بهتر است این خط را رسم کنیم:

$$x=۰ \Rightarrow ۰-۲y=-۶ \Rightarrow -۲y=-۶ \Rightarrow y=۳ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$$y=۰ \Rightarrow x-۲\times(۰)=-۶ \Rightarrow x-۰=-۶ \Rightarrow x=-۶ \Rightarrow \begin{bmatrix} -۶ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

این مثلث، یک مثلث قائم الزاویه است که ارتفاع آن ۳ و قاعده آن ۶ است:

$$\text{مساحت} = \frac{۶\times۳}{۲} = ۹$$



چگونه معادله خط را استاندارد کنیم؟ برای اینکه معادله خط را استاندارد کنیم ابتدا yها را در سمت چپ تساوی نگه می‌داریم و سپس بقیه جملات (xها و عددها) را به سمت راست می‌بریم. در مرحله بعد همه جملات دو طرف تساوی را بر ضریب y تقسیم می‌کنیم.

مثال: معادلات زیر را استاندارد کنید:

الف) $\mathbf{۴x - ۲y = ۶} \xrightarrow{\text{y ها سمت چپ بقیه سمت راست}} -۲y = -۴x + ۶ \xrightarrow{\text{همه را بر ضریب y تقسیم می‌کنیم}} \frac{-۲y}{-۲} = \frac{-۴x}{-۲} + \frac{۶}{-۲} \Rightarrow y = ۲x - ۳$

ب) $\mathbf{\frac{۲x-۳y}{۲} = \frac{۲x-۲}{۳}}$

از قانون طرفین وسطین کمک می‌گیریم:

$\Rightarrow ۳(۲x-۳y) = ۲(۲x-۲) \Rightarrow ۶x-۹y = ۴x-۴ \xrightarrow{\text{y ها سمت چپ بقیه سمت راست}} -۹y = ۴x - ۶x - ۴$

$-۹y = -۲x - ۴ \xrightarrow{\text{همه را بر ضریب y تقسیم می‌کنیم}} \frac{-۹y}{-۹} = \frac{-۲x}{-۹} - \frac{۴}{-۹} \Rightarrow y = \frac{۲}{۹}x + \frac{۴}{۹}$

ج) $\mathbf{۴(۲x-۲) = ۶y-۸}$

$۴(۲x-۲) = ۶y-۸ \Rightarrow ۸x-۸ = ۶y-۸ \xrightarrow{\text{y ها سمت چپ بقیه سمت راست}} -۶y = -۸x+۸-۸ \Rightarrow -۶y = -۸X$

$\xrightarrow{\text{همه را بر ضریب y تقسیم می‌کنیم}} \frac{-۶y}{-۶} = \frac{-۸x}{-۶} \Rightarrow y = \frac{۸}{۶}x \Rightarrow \xrightarrow{\text{ساده می‌کنیم}} y = \frac{۴}{۳}x$ (این خط از مبدأ می‌گذرد)

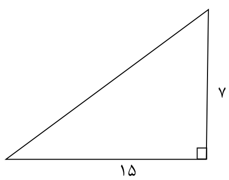
درس دوم: شیب خط و عرض از مبدأ

شیب خط:

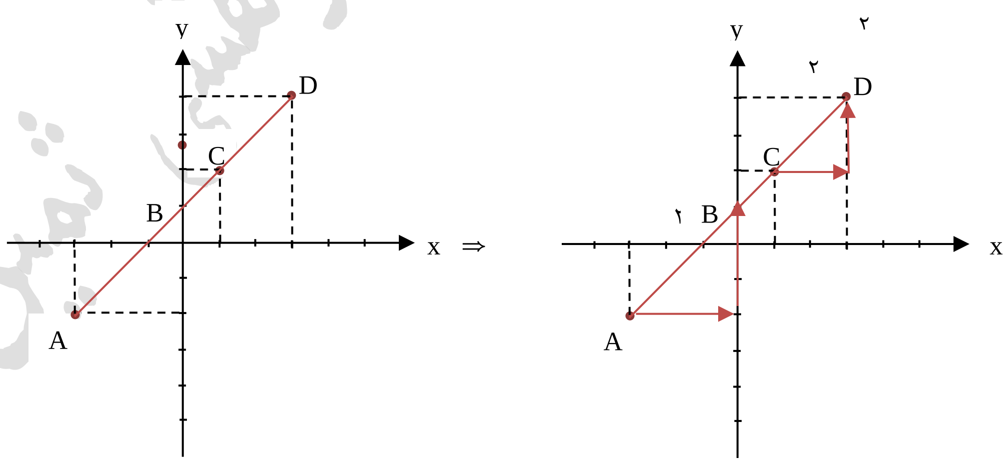
« برای یک سطح، شیب؛ به نسبت حرکت عمودی به حرکت افقی گفته می‌شود.»

مثال: در سطح زیر، شیب را محاسبه کنید.

حرکت عمودی در آن ۷ و حرکت افقط در آن ۱۵ است، پس شیب $\frac{۷}{۱۵}$ است.



به طور کلی خط را می‌توان مانند یک سطح شیب‌دار در نظر گرفت. در شکل زیر، فرض کنید یک نفر می‌خواهد از نقطه A به نقطه B برود و نفر دیگر می‌خواهد از نقطه C به نقطه D برود. نفر اول ۳ واحد حرکت افقی و ۳ واحد حرکت عمودی دارد، پس شیب خط را $\left(\frac{۳}{۳}=۱\right)$ اعلام می‌کند. نفر دوم ۲ واحد حرکت افقی و ۲ واحد حرکت عمودی انجام می‌دهد، پس او هم شیب خط را $\left(\frac{۲}{۲}=۱\right)$ اعلام می‌کند. مشاهده می‌کنید هر دو نفر به یک شیب دست پیدا کردند. پس می‌توان نتیجه گرفت که: «شیب یک خط بین هر دو نقطه دلخواه، به یک اندازه است»



محاسبه شیب خط از روی نقاط آن:

برای محاسبه شیب یک خط، نیازی نیست حتما شکل آن را رسم کنیم، بلکه با استفاده از مختصات دو نقطه از آن، می‌توان از رابطه زیر، شیب خط را به دست آورد.

$$\frac{\text{عرض نقطه اول} - \text{عرض نقطه دوم}}{\text{طول نقطه اول} - \text{طول نقطه دوم}} \ \text{یا}\ \frac{\text{عرض نقطه دوم} - \text{عرض نقطه اول}}{\text{طول نقطه دوم} - \text{طول نقطه اول}} = \frac{\text{اختلاف عرض دو نقطه}}{\text{اختلاف طول دو نقطه}} = \frac{\text{حرکت عمودی}}{\text{حرکت افقی}} = \text{شیب}$$

مثال: شیب خطی که از دو نقطه $\begin{bmatrix} ۳ \\ -۴ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$ عبور می‌کند را محاسبه کنید.

$$\text{شیب} = \frac{\overbrace{۲-(-۴)}^{+}}{۳-۲-} = \frac{۴+۲}{۵-} = \frac{۶}{۵-} = -\frac{۶}{۵} \qquad \text{یا} \qquad \text{شیب} = \frac{۲-۴-}{\underbrace{-۳(-۲)}_{+}} = \frac{۶-}{۵} = -\frac{۶}{۵}$$

مثال: شیب خطی که از دو نقطه $\begin{bmatrix} a\ ۱- \\ a\ ۲+ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۶ \\ ۳ \end{bmatrix}$ عبور می‌کند، برابر با ۳- است. مقدار a را محاسبه کنید.

ابتدا شیب را با استفاده از مختصات دو نقطه محاسبه می‌کنیم این مقدار باید برابر با ۳- شود.

$$\text{شیب} = \frac{a\ ۳-۲+}{a\ ۶-۱-} = \frac{a\ ۱-}{a\ ۷-}$$

$$\frac{a\ ۱-}{a\ ۷-} = \frac{۳-}{۱} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ×۱(a\ ۱-) = ۳-(a\ ۷-) \Rightarrow a\ ۱- = ۳-\ a + ۲۱ \Rightarrow a + ۳a = \Rightarrow ۱+۲۱$$

$$۴a = ۲۲ \Rightarrow a = \frac{۲۲}{۴} = \frac{۱۱}{۲}$$

مثال: خطی داریم که از سه نقطه $A = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۵ \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱۱ \end{bmatrix}$، $C = \begin{bmatrix} a\ ۲- \\ a۳+ \end{bmatrix}$ عبور می‌کند. مقدار a را محاسبه کنید.

البته برای حل این سئوال از روش‌های مختلفی وجود دارد که جلوتر، برخی از آن‌ها را می‌آموزیم اما در این‌جا با استفاده از شیب خط، مسئله را حل کنیم. می‌دانیم شیب خط را با هر دو نقطه‌ای که محاسبه کنیم، یک عدد به دست می‌آید. پس اگر شیب را با نقاط B و A به دست آوریم، با شیبی که با استفاده از نقاط B و C به دست می‌آوریم یکسان است:

$$\text{شیب با نقاط A و B} = \frac{۵-۱۱}{۴-۲} = \frac{۶}{۲-} = ۳-$$

$$\text{شیب با نقاط B و C} = \frac{(a+۳)-۱۱}{(a-۲)-۲} = \frac{-۱۱a۳-}{-۲a۲+} = \frac{-۸a}{-۴a}$$

یعنی این دو مقدار با هم برابرند.

$\frac{-۸a}{-۴a} = \frac{-۳}{۱} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ×۱(-۸a) = ۳-(-۴a) \Rightarrow -۸a = ۳+۱۲-a \Rightarrow -a-۳a = \Rightarrow ۸-۱۲-$

$۴-a = ۲۰- \Rightarrow a=۵$

شیب خط و معادله استاندارد:

فرض کنید یک خط به معادله استاندارد y=۲x-۱۲ داریم. اکنون می‌توانیم دو نقطه دلخواه از آن را محاسبه کنیم:

$x =۰ \Rightarrow y= ۲×(۰)-۱۲ \Rightarrow y=۱۲-۰ \Rightarrow y=-۱۲ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱۲- \end{bmatrix}$

$y =۰ \Rightarrow ۰=۲x-۱۲ \Rightarrow -۲x= -۱۲ \Rightarrow x=۶ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۶ \\ ۰ \end{bmatrix}$

حال با استفاده از این دو نقطه می‌توان شیب را محاسبه کرد: $\text{شیب} = \frac{۰-۱۲-}{۶-۰} = \frac{۱۲-}{۶-} = ۲$

اکنون شیب و معادله استاندارد را درکنار هم می‌نویسیم (۲=شیب و y =۲x-۱۲). مشاهده می‌کنید که شیب خط همان عددی است که در کنار x نوشته شده است. y = ۲x-۱۲ ۲=شیب

> **نکته:**
>
> در معادله خط y=ax+b عدد a، شیب خط نامیده می شود. با تغییر a زاویهٔ خط با جهت مثبت محور طول ها تغییر می کند. عدد b نشان دهنده محل برخورد خط با محور عرض ها است؛ به همین دلیل به آن عرض از مبدأ می گویند.

مثال: بدون استفاده از مختصات نقاط، شیب خط را محاسبه کنید. **۳x-۲y=y+۹x+۲**

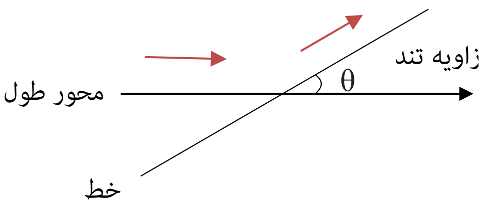
کافی است معادله خط را به صورت استاندارد درآوریم:

$۳x-۲y=y+۹x+۲ \xrightarrow{\text{y ها سمت چپ بقیه سمت راست}} -۲y-y=۹x-۳x+۲ \Rightarrow -۳y = ۶x+۲$

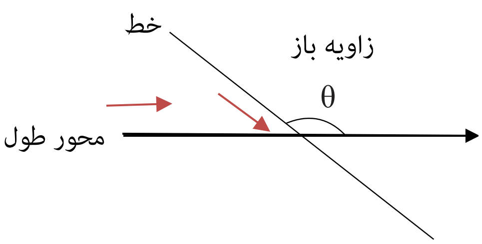
$\xrightarrow{\text{همه را بر ضریب y تقسیم می‌کنیم}} \frac{-۳y}{-۳} = \frac{۶x}{-۳} + \frac{۲}{-۳} \xrightarrow{\text{ساده می‌کنیم}} y = -۲x - \frac{۲}{۳} \Rightarrow$ شیب =-۲

شیب منفی و مثبت:

هرگاه زاویه بین خط و قسمت مثبت محور طول‌ها، یک زاویه تند باشد، شیب مثبت است. در این حالت خط از چپ به راست، به سمت بالا حرکت می‌کند.

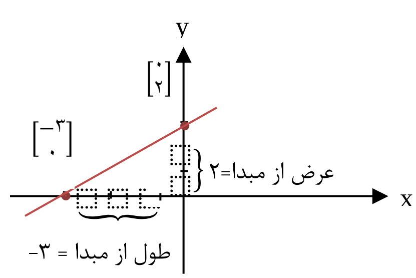


و اگر زاویه بین خط و قسمت مثبت محور طول‌ها، باز باشد، شیب منفی است. در این حالت خط از چپ به راست، به سمت پایین حرکت می‌کند.



عرض از مبدا و طول از مبدا:

قبلا گفتیم که یک خط ممکن است هر دو محور را قطع کند. به مقداری که خط با برخورد با محور طول‌ها، روی محور طول‌ها جدا می‌کند، طول از مبدأ و به مقداری که خط برخورد با محور عرض‌ها جدا می‌کند، عرض از مبدأ می‌گویند. برای پیدا کردن نقاط برخورد یک بار x را صفر قرار می‌دادیم، تا محل برخورد با محور عرض‌ها به دست آید و یک بار y را مساوی صفر قرار می‌دادیم، تا محل برخورد با محور طول‌ها به دست آید.



یادآوری: وقتی معادله یک خط را به صورت استاندارد y=ax+b می‌نویسیم، ضریب x همان شیب است و عددی که با آن‌ها جمع یا تفریق می‌شود، عرض از مبدأ خط است.

$y = \underbrace{a}_{\text{شیب}}\ x\ \underbrace{+b}_{\text{عرض از مبدأ}}$ $\qquad$ $y = \underbrace{۴}_{\text{شیب}}\ x\ \underbrace{+۳}_{\text{عرض از مبدأ}}$

مثال: خط را به صورت استاندارد بنویسید و شیب و عرض از مبدأ خط را برای آن‌ها مشخص کنید.

الف) ۲x−۳(x−۲y)=x+۶

$۲x-۳(x-۲y)=x+۶ \Rightarrow ۲x-۳x+۶y=x+۶ \Rightarrow ۶y=x-۲x+۳x+۶ \Rightarrow ۶y=۲x+۶ \xrightarrow{\text{همه را بر ضریب y تقسیم می‌کنیم}}$

$\frac{۶y}{۶} = \frac{۲x}{۶} + \frac{۶}{۶} \Rightarrow y = \frac{۱}{۳}x + ۱ \Rightarrow \begin{cases} \text{شیب} = \frac{۱}{۳} \\ \text{عرض از مبدأ} = ۱ \end{cases}$

مثال: معادله خطی که شیب آن ۵ و عرض از مبدأ آن ۳- است، را بنویسید.

$y = \underbrace{۵}_{\text{شیب}}\ x\ \underbrace{-۳}_{\text{عرض از مبدأ}}$

مثال: در خط y=(۲a−۳)x+(۲b−۴) ، مقدار a و b را به صورتی به دست آورید که شیب خط ۵ و عرض از مبدأ آن ۲ باشد.

$y = \underbrace{(۲a-۳)}_{\text{شیب =۵}}\, x \underbrace{+(۲b-۴)}_{\text{عرض از مبدأ=۲}} \Rightarrow \begin{cases} ۲a۵=۳- \Rightarrow ۲a۸=۳+۵ = \ \Rightarrow a۴ = \\ ۲b۲=۴- \Rightarrow ۲b۶ = ۴+۲ = \ \Rightarrow b۳ = \end{cases}$

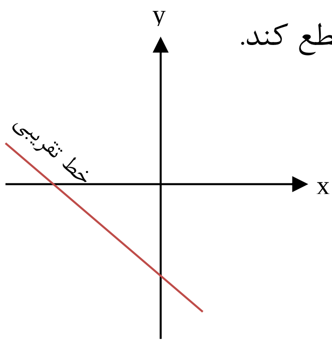
مثال: خطی دارای شیب ۳ است و از نقطه $\begin{bmatrix}۰\\-۶\end{bmatrix}$ عبور می‌کند. معادله آن به چه صورتی است؟

وقتی خط از منحنی $\begin{bmatrix}۰\\-۶\end{bmatrix}$ عبور می‌کند، یعنی محور عرض‌ها را در این نقطه قطع می‌کند. پس عرض از مبدأ آن ۶- است. لذا معادله خط برابر است با:

$y = \underbrace{۳}_{\text{شیب}}\ x\ \underbrace{-۶}_{\text{مبدأ از عرض}}$

مثال: اگر در معادله y=ax+b بدانیم $a < ۰$ و $b < ۰$ است، خطی به طور تقریبی رسم کنید که این ویژگی‌ها را داشته باشند.

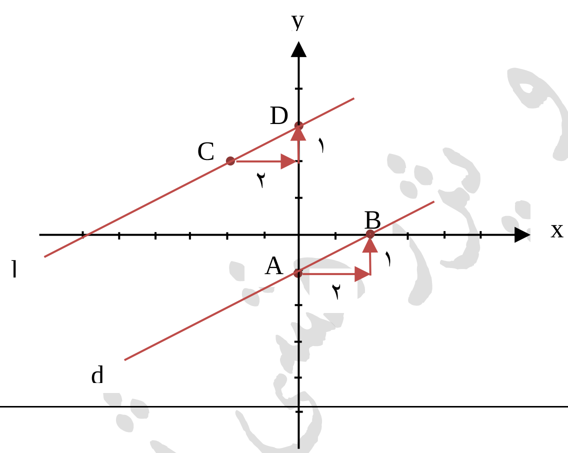
چون شیب منفی است ($a < ۰$)، پس خط باید از چپ به راست، به سمت پایین حرکت کند و چون عرض از مبدأ، منفی است ($b < ۰$)، پس خط باید محور عرض‌ها را در قسمت منفی (زیر صفر) قطع کند.



خطوط موازی با هم:

d معادله خط $\Rightarrow y = \underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\text{شیب}} x \underbrace{-۱}_{\text{عرض از مبدأ}}$

l معادله خط $\Rightarrow y = \underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\text{شیب}} x \underbrace{+۳}_{\text{عرض از مبدأ}}$



نکته:

در دو خط موازی شیب‌ها با هم برابر و عرض از مبدأ نامساوی هستند. مثال: y=۶x−۲ و y=۶x+۱

مثال: دو خط y=(۲a−۱)x−۳ و ۲(x−۲)−۳y=x+۴ با هم موازی‌اند. مقدار a را محاسبه کنید.

در دو خط باید شیب‌ها برابر باشند، ابتدا خط دوم را به صورت استاندارد می‌نویسیم تا شیب آن را به دست آوریم:

۲(x−۲)−۳y=x+۴ ⇒ ۲x−۳−۴y=x+۴ ⇒ −۳y=x−۲x+۴+۴ ⇒ −۳y= −۱x+۸

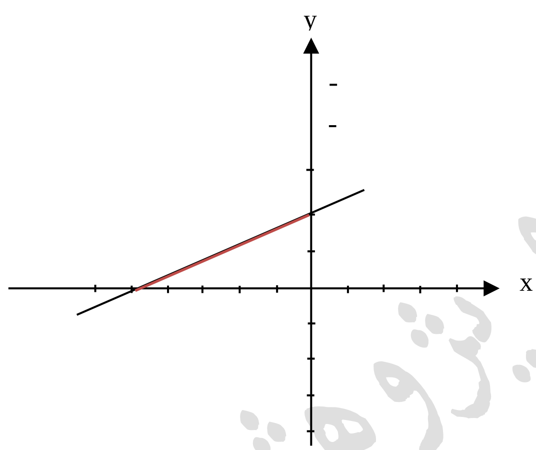
$$\xrightarrow{\text{همه را بر ضریب } y \text{ تقسیم می‌کنیم}} \frac{-3y}{-3} = \frac{-1x}{-3} + \frac{8}{-3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3} \quad ، \quad y = \underbrace{(2a-1)}_{\text{شیب}}x - 3$$

$$2a-1 = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{دو طرف را در ۳ ضرب می‌کنیم}} \times 3\left(2a-1 = \frac{1}{3}\right) \Rightarrow 6a-3 = 1 \Rightarrow 6a = 3 + 1 = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

دو خط منطبق:

اگر دو خط دارای شیب و عرض از مبدأ مساوی باشند، کاملا روی هم قرار می‌گیرند. در این حالت می‌گوییم دو خط، منطبق هستند. (پس از استاندارد کردن، معادله خط دو خط منطبق، کاملا یکسان خواهند بود).

به عنوان مثال در شکل زیر دو خط منطبق هستند، زیرا هر دو شیب یکسان دارند و هر دو در نقطه $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ محور عرض‌ها را قطع می‌کنند.

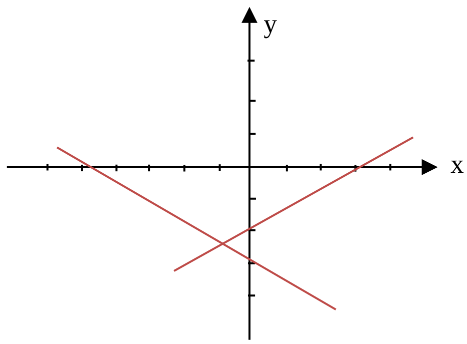


مثال: آیا دو خط $y=3x-2$ و $6y-18x=-12$ منطبق هستند؟

خط دوم را استاندارد می‌کنیم:

$$6y-18x=-12 \xrightarrow{y \text{ راست بقیه چپ}} 6y=18x-12 \rightarrow \frac{6y}{6} = \frac{18x}{6} - \frac{12}{6} \Rightarrow y=3x-2$$

مشاهده می‌کنید که معادله دو خط یکسان است. پس آن‌ها منطبق هستند.

تذکر: اگر دو خط شیب متفاوت داشته باشند، حتما همدیگر را قطع می‌کنند، حتی اگر عرض از مبدأ آن‌ها یکسان باشد. در شکل زیر هر دو خط دارای عرض از مبدأ ۲- هستند (محور عرض‌ها را در ۲- قطع می‌کنند)، اما چون شیب یکسان ندارند، یکدیگر را قطع کرده‌اند.	

روش های نوشتن معادلهٔ خط:

✓ نوشتن معادله خط، با داشتن شیب و یک نقطه از آن:

می‌دانیم معادله استاندارد خط به صورت $y=ax+b$ است که در آن a شیب است. حال اگر مقدار شیب خط را داشته باشیم و نیز مختصات یک نقطه از خط را داشته باشیم، می‌توانیم به جای a، مقدار شیب را قرار دهیم و طول و عرض نقطه را هم به جای x و y قرار دهیم. به این صورت که یک معادله ساخته می‌شود که از روی آن عرض از مبدأ به دست می‌آید.

مثال: معادله خطی بنویسید که شیب آن ۲ باشد و از نقطه $\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$ عبور کند.

$$y = ax+b \Rightarrow \underbrace{5}_{\text{عرض نقطه}} = \overbrace{3}^{\text{طول نقطه}} \times \underbrace{2}_{\text{شیب}} + b \Rightarrow 5=6+b \Rightarrow 6-5=b \Rightarrow b=-1$$

یعنی عرض از مبدأ خط ۱- است و چون شیب را هم از قبل داشتیم (۲)، پس معادله خط به صورت $y=2x-1$ است.

مثال: معادله خطی را بنویسید که با خط $y=3x-3$ موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix}10\\-5\end{bmatrix}$ عبور کند.

می‌دانیم وقتی دو خط موازی هستند، شیب آن‌ها برابر است. در خط $y=۳x-۳$، شیب خط ۳ است. پس خط ما هم باید شیب ۳ داشته باشد و از نقطه $\begin{bmatrix}۱۰\\-۵\end{bmatrix}$ عبور کند:

$$y=ax+b \Rightarrow \underbrace{-۵}_{\text{عرض نقطه}} = \overset{\text{شیب}}{۳} \times \underbrace{۱۰}_{\text{طول نقطه}} + b \Rightarrow -۵=۳۰+b \Rightarrow -۳۰-۵= b \Rightarrow b=-۳۵$$

$y=۳x-۳۵$ (معادله خط)

مثال: معادله خطی را بنویسید که با خط $۲x-۳y=-۶$ موازی بوده و از، عرض از مبدأ خط $۴x-۴y=۱۶$ عبور کند.

چون خط مورد نظر ما با $۲x-۳y=-۶$ موازی است، پس شیب آن‌ها با هم برابر است:

$$۲x-۳y=-۶ \Rightarrow -۳y=-۲x-۶ \rightarrow \frac{-۳y}{-۳}=\frac{-۲x}{-۳}-\frac{۶}{-۳} \Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x+۲$$

پس شیب خط مورد نظر ما $\frac{۲}{۳}$ است. همچنین با به دست آوردن عرض از مبدأ خط $۴x-۴y=۱۶$، در واقع عرض از مبدأ خط مورد نظر ما هم به دست می آید:

$$۴x-۴y=۱۶ \Rightarrow -۴y=-۴x+۱۶ \rightarrow \frac{-۴y}{-۴}=\frac{-۴x}{-۴}+\frac{۱۶}{-۴} \Rightarrow y=x-۴$$

عرض از مبدأ این خط ۴- است. پس خط مورد نظر ما دارای شیب $\frac{۲}{۳}$ و عرض از مبدأ ۴- است:

$$y=\frac{۲}{۳}x-۴$$

✓ نوشتن معادله خط با استفاده از دو نقطه

وقتی دو نقطه از یک خط را داشته باشیم، ابتدا می‌توانیم با استفاده از همان دو نقطه، شیب خط را به دست آوریم. سپس با استفاده از شیب خط و یکی از همان دو نقطه (به دلخواه)، می‌توانیم معادله خط را بنویسیم.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $\begin{bmatrix}۴\\-۷\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-۱\\۳\end{bmatrix}$ عبور کند.

ابتدا شیب خط را با استفاده از دو نقطه، به دست می‌آوریم:

$$\text{شیب} = \frac{\overbrace{۳-(-۷)}^{+}}{-۱-۴} = \frac{۱۰}{-۵} = -۲$$

اکنون می‌دانیم شیب ۲- است. یکی از دو نقطه را به دلخواه انتخاب می‌کنیم و در معادله استاندارد قرار می‌دهیم (مثلاً $\begin{bmatrix}۴\\ ۷-\end{bmatrix}$):

$$y=ax+b \Rightarrow \underbrace{-۷}_{\text{عرض نقطه}} = \overbrace{-۲}^{\text{شیب}} \times \underbrace{۴}_{\text{طول نقطه}} + b \Rightarrow -۷=-۸+b \Rightarrow -۷+۸= b \Rightarrow b = +۱$$

پس عرض از مبدا ۱ و شیب ۲- است. بنابراین معادله به صورت y=-۲x+۱ خواهد شد.

مثال: معادله خطی را بنویسید که عرض از مبدأ آن ۳ باشد و از نقطه $\begin{bmatrix}۲-\\ ۱\end{bmatrix}$ عبور کند.

وقتی می‌گوییم عرض از مبدأ آن ۳ است یعنی از نقطه $\begin{bmatrix}۰\\ ۳\end{bmatrix}$ عبور کند پس با دو نقطه $\begin{bmatrix}۰\\ ۳\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۲-\\ ۱\end{bmatrix}$ شیب را به دست می‌آوریم:

$$\text{شیب} = \frac{۱-۳}{-۰\ (۲-)} = \frac{۲}{۲} = ۱$$

شب خط یک است و در صورت سئوال عرض از مبدأ ۳ داده شده است، پس دیگر نیاز به محاسبه آن ندرایم، بنابراین معادله خط به صورت y = x +۳ است.

مثال : معادله خطی را بنویسید که از عرض از مبدأ خط ۳x-۲y=۲x +۶ عبور کند و نقطه $\begin{bmatrix}۴\\ ۵\end{bmatrix}$ روی آن قرار داشته باشد.

ابتدا خط دوم را استاندارد می‌کنیم.

$$۳x-۲y=۲x +۶ \Rightarrow -۲y=۲x -۳x+۶ \Rightarrow -۲y = -۱x+۶ \Rightarrow \frac{۲-y}{۲-} = \frac{۱-x}{۲-} + \frac{۶}{۲-} \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}\ x -۳$$

عرض از مبدأ این خط ۳- است، پس خط مورد نظر ما هم از نقطه $\begin{bmatrix}۰\\ ۳-\end{bmatrix}$ عبور می‌کند (عرض از مبدأ خط ماهم ۳- است). با داشتن دو نقطه $\begin{bmatrix}۰\\ ۳-\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۴\\ ۵\end{bmatrix}$ می‌توانیم شیب خط را حساب کنیم:

$$= \frac{\overbrace{۵-(۳-)}^{+}}{۰-۴} = \frac{۸}{۴} = ۲$$

شیب

پس شیب خط ۲ است و عرض ازمبدأ آن ۳- است. بنابراین معادله خط به صورت y =۲x-۳ است.

صورت کلی معادله خط:

معادله استاندارد خط به صورت y=ax+b است، اما یک معادله خط را می‌توان به صورت ax+by=c نیز نشان داد. دقت کنید دیگر در اینجا ضریب x، شیب نیست و عدد c هم عرض از مبدأ نیست. بلکه برای پیدا کردن شیب و عرض از مبدأ باید معادله خط را دوباره به صورت y=ax+b مرتب کنیم. نوشتن معادله خط به صورت ax+by=c نیز ویژگی‌هایی دارد.

مثال: معادله های زیر را به صورت ax+by=c بنویسید

الف) ۲−۶x=۸y

$۲-۶x=۸y \Rightarrow -۲x-۸y = -۶$

ب) ۸−۴y=۴+۸x

$-۴x - ۸y = +۴$

مثال: با توجه به معادله ax+by=c در هر یک از معادله‌های زیر، مشخص کنید ضرایب a، b و c کدام‌اند؟

ابتدا باید هر معادله را مرتب کنیم:

الف) ۶ − ۲y = ۴x

$۶ - ۲y = ۴x \Rightarrow \underbrace{-۴}_{a}\,x\,\underbrace{-۲}_{b}\,y = \underbrace{-۶}_{c}$

ب) ۶x + ۲ = ۸y +۱

$\underbrace{۶}_{a}\,x\,\underbrace{-۸}_{b}\,y = \underbrace{-۱}_{c}$

برای مشخص کردن شیب و عرض از مبدأ در معادله‌هایی به فرم ax+by=c باید آن را به صورت y=ax+b بنویسیم. در این صورت شیب برابر با نسبت $\frac{-a}{b}$ و عرض از مبدأ برابر با نسبت $\frac{c}{b}$ است.

مثال: در هر یک از معادلات زیر، شیب و عرض از مبدأ را به دست آورید.

شیب برابر با نسبت $-\frac{a}{b}$ و عرض از مبدأ برابر با نسبت $\frac{c}{b}$ است.

الف) $۶x + ۲y = ۸$

$\underbrace{۶}_{a}x\underbrace{۲+}_{b}y = \underbrace{۸}_{c}$

شیب $= -\frac{۶}{۲} = -۳$

عرض از مبدأ $= \frac{۸}{۲} = ۴$

ب) $۱۰x - ۲y = -۴$

$\underbrace{۱۰}_{a}x\underbrace{۲-}_{b}y = \underbrace{۴-}_{c}$

شیب $= -\frac{۱۰}{۲-} = -۵$

عرض از مبدأ $= \frac{۴-}{۲-} = +۲$

مثال: در هر قسمت معادله ۲ خط نوشته شده است. مشخص کنید که کدامیک موازی، کدامیک منقطع و کدامیک منطبق هستند.

الف) $\begin{cases} ۳x-۲y=۱۰ \\ ۶-x+۴y=۸ \end{cases}$ ب) $\begin{cases} ۲x-۳y=۴ \\ ۴x+۶y=۲ \end{cases}$ ج) $\begin{cases} ۵x+۴y=۱۰- \\ ۱۰-x+۸y=۲۰+ \end{cases}$

در هر قسمت شیب و عرض از مبدأ را به دست می‌آوریم. اگر شیب‌ها مساوی نباشند، دو خط هم دیگر را قطع می‌کنند (متقاطع هستند)، اگر فقط شیب‌های مساوی داشتند و عرض از مبدأ آن‌ها یکسان نبود، موازی هستند و اگر هم شیب و هم عرض از مبدأ آن‌ها برابر باشد، پس منطبق هستند:

الف) $\begin{cases} \underbrace{۳}_{a}x\underbrace{-۲}_{b}y=\underbrace{۱۰}_{c} \Rightarrow \text{شیب} = -\frac{۳}{۲-} = +\frac{۳}{۲} \quad ، \quad \text{عرض از مبدأ} = \frac{۱۰}{۲-} = ۵- \\ \underbrace{۶-}_{a}x\underbrace{+۴}_{b}y=\underbrace{۸}_{c} \Rightarrow \text{شیب} = -\frac{۶-}{۴} = +\frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲} \quad ، \quad \text{عرض از مبدأ} = \frac{۸}{۴} = ۲ \end{cases}$

در این دو خط، شیب‌ها مساوی‌اند ولی عرض از مبدأ برابر نیستند. پس دو خط موازی‌اند.

ب) $\begin{cases} \underbrace{۲}_{a}x\underbrace{-۳}_{b}y=\underbrace{۴}_{c} \Rightarrow \text{شیب} = -\frac{۲}{۳-} = \frac{۲}{۳} \quad ، \quad \text{عرض از مبدأ} = \frac{۴}{۳-} \\ \underbrace{۴}_{a}x\underbrace{+۶}_{b}y=\underbrace{۲}_{c} \Rightarrow \text{شیب} = -\frac{۴}{۶} = -\frac{۲}{۳} \quad ، \quad \text{عرض از مبدأ} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳} \end{cases}$

در این دو خط شیب ها برابر نیستند، پس دو خط هم دیگر را قطع می‌کنند.

ج) $\begin{cases} \underbrace{۵}_{a}x\underbrace{+۴}_{b}y = \underbrace{۱۰-}_{c} \Rightarrow \text{شیب} = -\frac{۵}{۴} \quad ، \quad \text{عرض از مبدأ} = \frac{۱۰}{۴} = \frac{۵-}{۲} \\ \underbrace{۱۰-}_{a}x\underbrace{۸-}_{b}y = \underbrace{۲۰+}_{c} \Rightarrow \text{شیب} = -\frac{۱۰-}{۸-} = -\frac{۱۰}{۸} = -\frac{۵}{۴} \quad ، \quad \text{عرض از مبدأ} = \frac{۲۰}{۸-} = -\frac{۵}{۲} \end{cases}$

در این دو خط هم شیب‌ها و هم عرض‌ها از مبدأها برابرند، پس دو خط، بر هم منطبق هستند.

حالات کلی دو خط نسب به یکدیگر:

✓ حالت اول

دو خط ax+by=c و a'x+b'y=c' را در نظر بگیرید، اگر داشته باشیم:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$$

دو خط موازی هستند.

مثال: آیا دو خط زیر موازی هستند؟

$$\begin{cases}\text{۵x-۳y=۸}\\ \text{۱۵x۹–y=۲۴-}\end{cases}$$

بله موازی هستند.

$$\begin{cases}\overbrace{\text{۵}}^{a}\,x\,\overbrace{-\text{۳}}^{b}\,y=\overbrace{\text{۸}}^{c}\\ \underbrace{\text{۱۵}}_{a'}\,x\,\underbrace{\text{۹-}}_{b'}\,y=\underbrace{\text{۲۴-}}_{c'}\end{cases}\Rightarrow\quad \frac{\text{۵}}{\underbrace{\text{۱۵}}_{\text{نسبت}=\frac{۱}{۳}}}=\frac{\text{۳-}}{\underbrace{\text{۹-}}_{\text{نسبت}=\frac{۱}{۳}}}\neq\frac{\text{۸}}{\underbrace{\text{۲۴-}}_{\text{نسبت}=-\frac{۱}{۳}}}$$

✓ حالت دوم

دو خط ax+by=c و a'x+b'y=c' ، را در نظر بگیرید، اگر داشته باشیم:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

آن دو خط منطبق هستند.

مثال: آیا دو خط زیر، منطبق هستند؟

$$\begin{cases}\text{۵x-۳y=۴}\\ \text{۲۰–x۱۲+ y=۱۶–}\end{cases}$$

بله، زیرا داریم:

$$\begin{cases} \overbrace{5}^{a}x \overbrace{-3}^{b}y = \overbrace{4}^{c} \\ \underbrace{-20}_{a'}x \underbrace{+12}_{b'}y = \underbrace{-16}_{c'} \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\frac{5}{-20}}_{\text{نسبت}=-\frac{1}{4}} = \underbrace{\frac{-3}{12}}_{\text{نسبت}=-\frac{1}{4}} = \underbrace{\frac{4}{-16}}_{\text{نسبت}=-\frac{1}{4}}$$

✓ **حالت سوم:**

دوخط ax+by=c و a'x+b'y=c' را در نظر بگیرید، اگر داشته باشیم:

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

آن‌گاه دو خط متقاطع خواهند بود.

مثال: آیا دو خط ۵x−۴y=۰ و ۲۵x−۲۰y=۱۰− متقاطع هستند؟

بله، زیرا $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$:

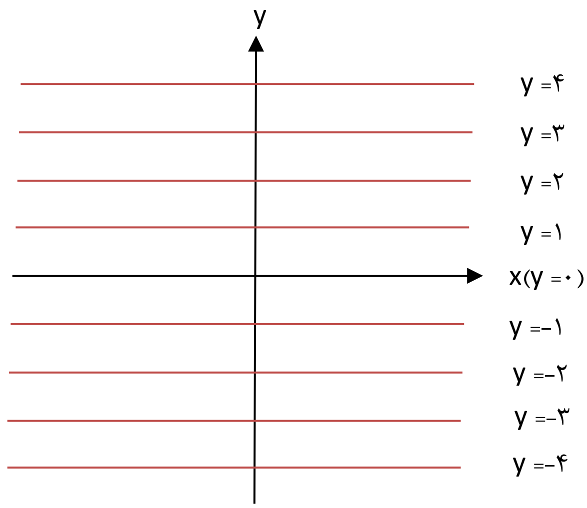
$$\begin{cases} \overbrace{5}^{a}x \overbrace{-4}^{b}y = \overbrace{0}^{c} \\ \underbrace{-25}_{a'}x \underbrace{-20}_{b'}y = \underbrace{10}_{c'} \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{-25} \neq \frac{-4}{-20}$$

خط های موازی محور طول‌ها:

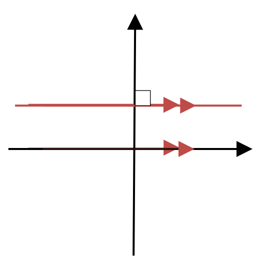
> نکته:
>
> هرگاه در یک خط عرض همه نقطه ها برابر باشد آن‌گاه خط موازی محور طول‌ها خواهد بود و معادله آن برابر است با: y=عرض نقطه‌ها

در شکل زیر، چند خط افقی (موازی محور طول‌ها) مشاهده می‌کنید که معادله خط را می‌توان به صورت «عرض از مبدأ خط=y» هم نوشت، زیرا عرض همه نقطه‌ها برابر با عرض از مبدأ خط است.

محور طول‌ها را می‌توانیم به صورت y=۰ بنویسیم، زیرا در این خط، عرض همه نقطه‌ها صفر است.



تذکر: گاهی به جای عبارت «خطی که موازی محور طول‌هاست» عبارت «خطی که بر محورعرض‌ها عمود است» استفاده می‌شود. در شکل می‌بینید که خطی که بر محور عرض‌ها عمود باشد، موازی محور طول‌ها هم است.



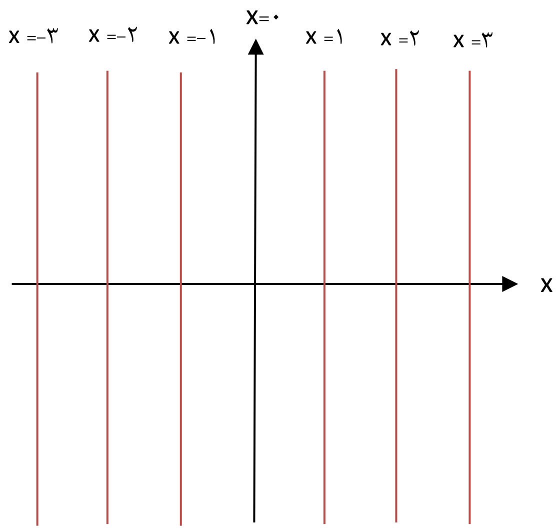
مثال: معادله خطی که موازی محور طول‌ها است و از نقطه $\begin{bmatrix} ۸ \\ ۲a-۳ \end{bmatrix}$ عبور می‌کند، به صورت y=۵ است، مقدار a چه قدر است؟

چون خط موازی محور طول‌هاست، یعنی خط افقی است و عرض همه نقاط آن برابر است و چون معادله خط y=۵ است، یعنی عرض همه نقاط آن ۵ است، پس عرض نقطه $\begin{bmatrix} ۸ \\ ۲a-۳ \end{bmatrix}$ هم، ۵ است:

$$۲a-۳=۵ \Rightarrow ۲a=۳+۵ \Rightarrow ۲a=۸ \Rightarrow a=\frac{۸}{۲}=۴$$

خط های موازی محور عرض‌ها:

هرگاه خطی عمودی باشد، آن‌گاه طول همه نقاط آن با هم برابر است. در این خط عرض از مبدا وجود ندارد و شیب تعریف نشده است. معادله این خط ها به صورت (طول نقاط=x) نوشته می‌شود. در شکل زیر تعدادی خط عمودی و معادله آن ها نوشته شده است.



محور عرض‌ها را می‌توان به صورت x=۰ نشان داد، زیرا روی این محور، طول همه نقاط صفر است.

مثال: معادله خطی را بنویسید که بر محور طول‌ها عمود باشد و از نقطه $\begin{bmatrix}۶\\-۳\end{bmatrix}$عبور کند.

وقتی خطی بر محور طول‌ها عمود باشد، یعنی با محور عرض‌ها موازی است. پس در واقع معادله خطی هستیم که با محور عرض‌ها موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix}۶\\-۳\end{bmatrix}$ عبور کند. این خط یک خط عمودی است طول همه نقاط آن برابرند و چون از نقطه $\begin{bmatrix}۶\\-۳\end{bmatrix}$ عبور می‌کند پس طول همه نقاط آن ۶ است. معادله خط به صورت x=۶ خواهد بود.

مثال: معادله خطی که بر خط x=۱۲ عمود باشد و از نقطه $\begin{bmatrix}-۴\\-۵\end{bmatrix}$ عبور کند را بنویسید.

خط x=۱۲ موازی محور عرض‌ها است. خطی که بر آن عمود است. موازی محور طول‌ها است. یعنی آن خط افقی است و عرض همه نقاطش برابر است. چون آن خط از نقطه $\begin{bmatrix}-۴\\-۵\end{bmatrix}$ می‌گذرد، پس عرض همه نقاطش ۵- است (y= -۵)

مثال: معادله خطی که با خط ۶- =x موازی است و از نقطه $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$ عبور می‌کند را بنویسید.

خط ۶- = x خطی موازی محور عرض‌ها است و چون خط مورد نظر ما هم با این خط موازی است پس آن هم یک خط موازی محور عرض‌ها است و طول همه نقاطش برابر است و چون از نقطه $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$ عبور می‌کند، پس طول همه نقاط آن ۴ است (x=۴).

درس سوم: دستگاه معادلات خطی

اگر معادله دو یا چند خط را در کنار هم بنویسیم، عبارت ایجاد شده را دستگاه معادلات خطی می‌گوییم. در زیر، دو دستگاه معادله خطی نوشته شده است.

دستگاه معادلات خطی $\Rightarrow \begin{cases}5x2-y=4\\x=5-\end{cases}$ دستگاه معادلات خطی $\Rightarrow \begin{cases}2x+y=5\\x-y=1\end{cases}$

حل دستگاه معادلات خطی

معمولا برای حل دستگاه معادلات خطی، سه روش کلی وجود دارد:

۱. **روش ترسیمی:**

یکی از راه‌های حل دستگاه معادلات خطی رسم شکل است، محل برخورد دو خط، جواب دستگاه است. به این روش، روش ترسیمی می‌گویند. همانطور که پیش از این گفته شد برای رسم خط، باید با دادن مقادیر مختلف به x و y، دو نقطه خط را به دست آوریم و سپس خط را رسم کنیم.

مثال: جواب دستگاه روبرو را با استفاده از روش ترسیمی به دست آورید.

ابتدا در هر خط، با دادن مقدارهای دلخواه به x و y دو نقطه خط ها را پیدا می‌کنیم و به کمک آن‌ها خط را رسم می‌کنیم:

الف) $\begin{cases}2x+y=5\\x-y=1\end{cases}$

$$\begin{cases} ۲x+y=۵ \overset{x=۰}{\Longrightarrow} ۰ + y = ۵ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۰ \\ ۵ \end{bmatrix} \\ x-y=۱ \overset{x=۰}{\Longrightarrow} ۰ - y = ۱ \Rightarrow y = ۱- \Rightarrow \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱- \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$y = ۰ \Rightarrow ۲x + ۰ = ۵ \Rightarrow x = ۵/۲ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۵/۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

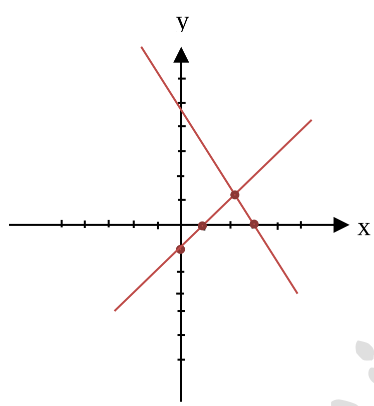
$$y = ۰ \Rightarrow x - ۰ = ۱ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

ب) $\begin{cases} ۳x+y=۴- \\ x-۲y=۱ \end{cases}$

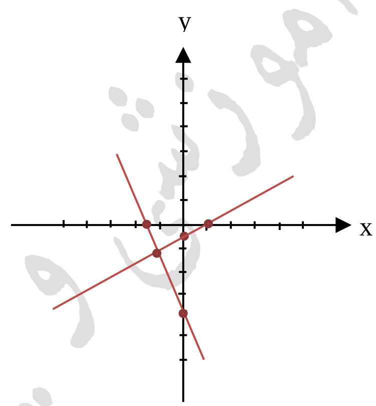
$$\begin{cases} ۳x+y=۴- \overset{x=۰}{\Longrightarrow} ۰ + y = ۴- \Rightarrow \begin{bmatrix} ۰ \\ ۴- \end{bmatrix} \\ x-۲y=۱ \overset{x=۰}{\Longrightarrow} ۰ - ۲y = ۱ \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۰ \\ -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$y = ۰ \Rightarrow ۳x + ۰ = ۴- \Rightarrow x = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{۴}{۳} \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$y = ۰ \Rightarrow x - ۰ = ۱ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$



نقطه برخورد $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ (شکل الف)



نقطه برخورد $\begin{bmatrix} ۱- \\ ۱- \end{bmatrix}$ (شکل ب)

۲. روش حذفی:

فرض کنید می‌خواهیم یک دستگاه معادلات خطی مثل دستگاه زیر را حل کنیم.

$$\begin{cases} ۲x + y = ۱۰ \\ ۳x + ۲y = ۱۶ \end{cases}$$

برای اینکه بتوانیم یکی از مجهول‌ها را حذف کنیم. باید کاری بکنیم که ضریب آن مجهول در دو معادله با هم برابر ولی قرینه هم باشد. برای این کار باید دو معادله را در اعدادی ضرب کنیم که ضریب یکی از مجمول‌ها با هم مساوی و قرینه شوند (تفاوتی نمی‌کند ضریب کدام مجهول را با هم مساوی و قرینه می‌کنیم). فرض کنید در این دستگاه می‌خواهیم ضریب x را مساوی و قرینه کنیم. ضریب x در معادله بالایی ۲ و در معادله پایینی، ۳ است.

ک.م.م این دو عدد ۶ است. پس باید معادله بالایی را در ۳ و معادله پایینی را در ۲ ضرب کنیم. همچنین چون علامت هر دو ضریب مثبت است (هم علامت هستند)، باید یکی از دو معادله را در منفی هم ضرب کنیم. فرقی نمی‌کند کدام یک را در منفی ضربی کنیم (قرینه کنیم)، ما در اینجا معادله بالایی را در ۳- ضرب می‌کنیم تا قرینه هم بشوند و معادله پایینی را در ۲+ ضرب می‌کنیم (دقت کنید که همه اعداد معادله را باید در عدد مورد نظر ضرب کنیم).

$$\begin{matrix} -۳ \\ +۲ \end{matrix} \begin{cases} ۲x + y = ۱۰ \\ ۳x + ۲y = ۱۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۶x - ۳y = -۳۰ \\ ۶x + ۴y = ۳۲ \end{cases}$$

حال اگر دو طرف معادله‌ها را با هم جمع کنیم، x حذف می‌شود و معادله‌ای که فقط y دارد به دست می‌آید. از اینجا می‌توانیم y را به دست آوریم:

$$\begin{array}{r} -۶x - ۳y = -۳۰ \\ \underline{۶x + ۴y = ۳۲} \end{array} \quad \text{جمع}$$

$$-۶x - ۳y + ۶x + ۴y = ۳۲ + (-۳۰) \Rightarrow -۳y + ۴y = ۳۲ - ۳۰ \Rightarrow ۱y = +۲ \Rightarrow y = ۲$$

اکنون کافی است در یکی از دو معادله اولیه (فرقی نمی‌کند کدام یک)، به جای y، مقدار ۲ را قرار دهیم و x را به دست آوریم:

$$۲x+y=۱۰ \overset{y=۲}{\Longrightarrow} ۲x+۲=۱۰ \Rightarrow ۲x=۱۰-۲ \Rightarrow ۲x=۸ \Rightarrow x=۴$$

پس نقطه برخورد دو خط، دارای طول ۴ و عرض ۲ است: $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix}$

تذکر:

① همان طور که می‌بینید. در دستگاه معادلات همواره خط را به فرم $ax+by=c$ می‌نویسیم، پس در صورت نیاز، معادلهٔ خط را مرتب می‌کنیم. مثلاً اگر خط به صورت $۲x = ۷-۴y$ باشد، آن را به صورت $۲x+۷y=۴$ می‌نویسیم.

② در بسیاری از دستگاه‌های معادلات خطی، ابتدا باید با استفاده از عملیات‌های ریاضی، معادلات را مرتب کنیم. مثلاً در عبارت‌های کسری، با ضرب دو طرف معادله در ک.م.م مخرج‌ها، معادله را از حالت کسری خارج کنیم.

مثال: محل برخورد دو خط داده شده را به دست آورید.

$$\begin{cases} ۳(x-۲y)۹+ = ۶x \\ ۵x - ۴y = ۱۳- \end{cases}$$

در معادله بالایی باید عبارت را ساده کرده و بعد به فرم $ax+by=c$ مرتب کنیم:

$$۳(x-۲y)۹+ = ۶x \Rightarrow ۳x-۶y+۹=۶x \Rightarrow ۳\ x - ۶x - ۶y=-۹ \Rightarrow -۳x-۶y=-۹$$

دستگاه به صورت زیر است (در حل آن، ضریب‌های x را یکسان و قرینه کرده‌ایم):

$$\begin{matrix}\times۵ \\ \times۳\end{matrix}\begin{cases} ۳-x\ -۶y = ۹- \\ ۵x - ۴y = ۱۳- \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} ۱۵-x\ -۳۰y = ۴۵- \\ \underline{۱۵x-۱۲y=۳۹-} \end{array}$$

$$۰ - ۳۰y - ۱۲y = ۳۹-۴۵- \Rightarrow ۴۲-y = ۸۴- \Rightarrow y = ۲$$

حال در یک از معادلات اولیه، به جای y مقدار ۲ را قرار می‌دهیم:

$$۵x-۴y=۱۳- \xRightarrow{y=۲} ۵x -۴ \times (۲) = -۱۳ \Rightarrow ۵x -۸ = -۱۳ \Rightarrow ۵x = -۸+۱۳=-۵ \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow \text{نقطه} = \begin{bmatrix} ۱- \\ ۲ \end{bmatrix}$$

۳- روش جایگذاری

به دستگاه زیر دقت کنید در این دستگاه، معادله دوم (y=۲x-۳) به صورتی که y را بر حسب x نوشته است. طبق این معادله ما می‌توانیم در معادله اول به جای y، عبارت ۲x-۳ را «جایگزین» کنیم. آن‌گاه معادله‌ای ساخته می‌شود که فقط x دارد و می‌توانیم x را به دست آوریم.

$$\begin{cases} ۳x۲+y=۲۲ \\ y=۲x۳- \end{cases}$$

$$۳x۲+\underbrace{y}_{۲x۳-}=۲۲ \Rightarrow ۳x+۲(۲x-۳)=۲۲ \Rightarrow ۳x+۴x-۶=۲۲ \Rightarrow ۷x=۶+۲۲=۲۸ \Rightarrow x=۴$$

اکنون می‌توانیم در معادله دوم، به جای x مقدار ۴ قرار می‌دهیم تا y به دست آید:

$$y = ۲x-۳ \Rightarrow y = ۲ \times ۴ -۳ = ۳-۸ =۵$$

به این روش که در آن به جای یکی از مجهول‌ها، عبارتی می‌نویسیم که بر حسب مجهول دیگر است، روش جایگذاری می‌گوییم. اگر در معادله، هیچ کدام از مجهول‌ها، بر حسب دیگری نبود، باید خودمان این کار را انجام دهیم.

مثال: دستگاه داده شده را به روش جایگزینی حل کنید.

الف) $\begin{cases} ۲x۳-y=۲ \\ ۴y۲+x۳۰= \end{cases}$

در یکی از معادلات، یکی از مجهول‌ها را بر حسب دیگری به دست می‌آوریم. (فرقی نمی‌کند کدام معادله و کدام مجهول ما در این جا، در معادله دوم، y را بر حسب بقیه به دست می‌آوریم:

$$۴y۲+x۳۰= \xrightarrow{\text{y ها سمت چپ بقیه سمت راست}} ۴y = ۲ - ۳۰x \xrightarrow{\text{همه را بر ضریب y تقسیم می‌کنیم}} \frac{۴y}{۴}=\frac{۳۰}{۴}-\frac{۲x}{۴} \Rightarrow y=\frac{۱۵}{۲}-\frac{۱}{۲}x$$

پس در معادله بالایی به جای y عبارت $\frac{۱۵}{۲}-\frac{۱}{۲}x$ قرار می‌دهیم:

$$۲x-۳(\overbrace{\frac{۱۵}{۲}-\frac{۱}{۲}x}^{y})=۲ \Rightarrow ۲x-\frac{۴۵}{۲}+\frac{۳}{۲}x=۲ \xrightarrow[\text{تا از حالت کسری خارج شود}]{\text{معادله را در ۲ ضرب می‌کنیم}} ۲(۲x-\frac{۴۵}{۲}+\frac{۳}{۲}x=۲) \Rightarrow ۴x-\frac{۹۰}{۲}+\frac{۶}{۲}x=۴$$

$$\Rightarrow ۴x -۳+۴۵x=۴ \Rightarrow ۴x+۳x=۴+۴۵ \Rightarrow ۷x=۴۹ \Rightarrow x=۷$$

حال به جای x در معادله پایینی، عدد ۷ را قرار می دهیم تا y به دست آید:

$$۴y+۲x=۳۰ \xRightarrow{x=۷} ۴y+۲\times۷=۳۰ \Rightarrow ۴y+۱۴=۳۰ \Rightarrow ۴y=۱۴-۳۰=۱۶ \Rightarrow y=۴ \Rightarrow \text{نقطه} = \begin{bmatrix}۷\\۴\end{bmatrix}$$

تذکر: یک دستگاه معادلات خطی را می توانید با یکی از روش های گفته شده حل کنید.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از محل برخورد دو خط ۳x−y=۷ و ۲x+۲y=۱۸ عبور می‌کند و با خط ۶=۵x−۱۰y موازی باشد.

$$\begin{cases}۲x۲+y=۱۸\\ ۳x-y=۷ \quad \times۲\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۲x۲+y=۱۸\\ ۶x۲-y=۱۴\end{cases}$$

$$۲x+۲y+۶x-۲y=۱۴+۱۸ \quad ۸x=۳۲ \Rightarrow x=۴$$

حال با قرار دادن مقدار x=۴ در یکی از معادلات مقدار y را به دست آوریم:

$$۳x-y=۷ \xRightarrow{x=۴} ۳\times۴-y=۷ \Rightarrow ۱۲-y=۷ \Rightarrow -y=۱۲-۷=-۵ \Rightarrow y=۵ \Rightarrow \text{نقطه} = \begin{bmatrix}۴\\۵\end{bmatrix}$$

چون خط مورد نظر ما با خط ۵x−۱۰y=۶ موازی است، شیب خط مورد نظر ما هم با شیب این خط برابر است. با استاندارد کردن این خط، شیب آن را به دست می‌آوریم:

$$۵x۱۰-y=۶ \Rightarrow -۱۰y=-۵x+۶ \xrightarrow[\text{y تقسیم می‌کنیم}]{\text{همه را بر ضریب}} \frac{-۱۰x}{-۱۰} = \frac{-۵y}{-۱۰} + \frac{۶}{-۱۰} \Rightarrow y= x\frac{۱}{۲} - \frac{۶}{۱۰}$$

شیب این خط $\frac{۱}{۲}$ است، پس می‌توان گفت به دنبال معادله خطی می‌گردیم که از نقطه $\begin{bmatrix}۴\\۵\end{bmatrix}$ عبور کند و شیب آن $\frac{۱}{۲}$ باشد. در معادله استاندارد y=ax+b به جای a عدد $\frac{۱}{۲}$ و به جای x و y خط، طول و عرض نقطه $\begin{bmatrix}۴\\۵\end{bmatrix}$ را قرار می‌دهیم تا عرض از مبدأ خط به دست آید:

$$y = ax + b \Rightarrow ۵=\frac{۱}{۲}\times۴+b \Rightarrow ۵=۲+b \Rightarrow b=۳$$

عرض از مبدأ خط، ۳ شد، پس معادله خط به صورت $y=\frac{۱}{۲}x+۳$ است.

نکاتی در مورد حل دستگاه ها:

✓ دستگاه‌هایی که جواب ندارند:

اگر دو خط با معادله‌های ax + by = c و a'x + b'x=c' داشته باشیم، در صورتی که $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ ، آن‌گاه دو خط موازی هستند و هرگز همدیگر را قطع نمی‌کنند. پس اگر در یک دستگاه که شامل دو معادله خط است، این اتفاق بیافتد، آنگاه دستگاه جواب ندارد.

مثال:

$$\begin{cases} \overbrace{۳}^{a} x \overbrace{+۴}^{b} y = \overbrace{۸}^{c} \\ \underbrace{۶}_{a'} x \underbrace{+۱۲}_{b'} y = \underbrace{۱۲}_{c'} \end{cases}$$

در این دستگاه $\frac{a}{a'} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$ ، $\frac{b}{b'} = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$ ، $\frac{c}{c'} = \frac{۸}{۱۲} = \frac{۲}{۳}$ است.

پس $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ ، بنابراین دو خط موازی هستند و هرگز همدیگر را قطع نمی‌کنند (دستگاه جواب ندارد).

✓ دستگاه‌هایی که بی شمار جواب دارند:

هر گاه دو خط منطبق باشند، روی هم قرار می‌گیرند، پس بی‌شمار نقطه مشترک دارند. همچنین گفتیم هرگاه دو معادله به صورت ax + by = c و a'x + b'x=c' داشته باشیم، در صورتی که $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ باشد، آن دو خط منطبق هستند و بی‌شمار نقطه مشترک دارند، پس اگر در یک دستگاه معادله خطی این اتفاق بیافتد، دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

مثال:

$$\begin{cases} \overbrace{۳}^{a} x \overbrace{۵-}^{b} y = \overbrace{۸}^{c} \\ \underbrace{۱۵}_{a'} x \underbrace{۲۵-}_{b'} y = \underbrace{۴۰}_{c'} \end{cases}$$

در دستگاه بالا $\frac{a}{a'} = \frac{۳}{۱۵} = \frac{۱}{۵}$ ، $\frac{b}{b'} = \frac{۵-}{۲۵-} = \frac{۱}{۵}$ ، $\frac{c}{c'} = \frac{۸}{۴۰} = \frac{۱}{۵}$ است، پس $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ است، یعنی این دستگاه شامل دو خط منطبق بر هم است و بی‌شمار جواب دارد.

نکته: حل مسأله با کمک دستگاه:

1. اگر یک رابطه خطی بین دو مقدار وجود داشته باشد، بی‌شمار جواب برای آن می‌توان نوشت
2. اگر به جای یک رابطه خطی، دو رابطه خطی بین دو مقدار مورد نظر داشته باشیم، یک دستگاه معادلات خطی ایجاد می‌شود و با حل آن می‌توانیم مقدارهای مورد نظر را به دست آوریم.

مثال: در یک پارکینگ روی هم ۸۰ اتومبیل و موتور وجود دارد اگر تعداد چرخ‌های آن‌ها روی هم ۲۳۲ باشد، تعداد موتورها و اتومبیل‌ها را حساب کنید.

اگر تعداد اتومبیل‌ها را با a و تعداد موتورها را با m نشان دهید آنگاه چون جمع اتومبیل‌ها و موتورها روی هم ۸۰ تا است، پس (a+m=۸۰) است. از طرفی هر اتومبیل ۴ چرخ دارد، پس هر اتومبیل ۴a = ۴×a چرخ دارد و هر موتور هم دو چرخ دارد. پس m موتور روی هم ۲×m=۲m چرخ دارند. می‌دانیم تعداد چرخ‌های آن‌ها روی هم ۲۳۲ است، پس (۴a+۲m=۲۳۲)

$$\times -۴ \begin{cases} a + m = ۸۰ \\ ۴a+۲m=۲۳۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۴a-۴m=-۳۲۰ \\ \underline{۴a+۲m=۲۳۲} \end{cases}$$

$$+۴a+۲m=۲۳۲+۳۲۰-۴a-۴m \Rightarrow -۲m=-۸۸ \Rightarrow m=۴۴$$

پس تعداد موتورها ۴۴ تا است با قرار دادن m=۴۴ در یکی از معادلات، تعداد اتومبیل‌ها را نیز محاسبه می‌کنیم:

$$a + m = ۸۰ \xRightarrow{m=۴۴} a+۴۴=۸۰ \Rightarrow a=۴۴-۸۰=۳۶$$

مثال: دو عدد داریم که مجموع ۳ برابر اولی و ۴ برابر دومی، ۶۱ می‌شود. همچنین اگر از ۲ برابر اولی، ۳ برابر دومی را کم کنیم حاصل یک می‌شود. این دو عدد را پیدا کنید.

اگر عدد اول را a و عدد دوم را b فرض کنیم، داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳a + ۴b = ۶۱ \\ ۲a - ۳b = ۱ \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \times ۲- \\ \times ۳ \end{matrix} \begin{cases} ۳a + ۴b = ۶۱ \\ ۲a - ۳b = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۶\text{-a}۸\text{-b}=۱۲۲- \\ \underline{۶a۹\text{-b}=۳} \end{cases}$$

$$+\ ۶a۹\text{-b}=۳+۱۲۲-۶\text{-a}۸\text{-b} \Rightarrow -۱۷b=-۱۱۹ \Rightarrow b=۷$$

حال اگر در یکی از معادلات بالایی، به جای b عدد ۷ را قرار دهیم عدد a را به دست می‌آوریم:

$$۳a + ۴b = ۶۱ \xRightarrow{b=۷} ۳a + ۴\times۷ = ۶۱ \Rightarrow ۳a = ۲۸ - ۶۱ = ۳۳ \Rightarrow a = ۱۱$$

مثال: مقدار a و b را به دست آورید.

$$\begin{cases} ۵^{۶a+۱} \times ۲۵^{۵b+۱} = ۵^{۱۸} \\ ۲^{۳a+۲} \times ۸^{۲b+a} = ۵۱۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۵^{۶a+۱} \times ۵^{۲(۵b+۱)} = ۵^{۱۸} \\ ۲^{۳a+۲} \times ۲^{۳(۲b+a)} = ۲^{۹} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۶a + ۱ + ۲(۵b + ۱) = ۱۸ \\ ۳a + ۲ + ۳(۲b + a) = ۹ \end{cases} \Rightarrow {}_{(۱-)\times} \begin{cases} ۶a + ۱۰b = ۱۵ \\ ۶a + ۶b = ۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۶a + ۱۰b = ۱۵ \\ \underline{۶\text{-a-}۶b = ۷-} \end{cases}$$

$$+۴b = ۸ \Rightarrow b = ۲$$

در یکی از معادلات به جای b مقدار آن، یعنی ۲ را قرار می‌دهیم، داریم:

$$۶a + ۱۰b = ۱۵ \xRightarrow{b=۲} ۶a + ۱۰\times۲ = ۱۵ \Rightarrow ۶a = ۱۵ - ۲۰ = -۵ \Rightarrow a = -\frac{۵}{۶}$$