جزوه کمک آموزشی نکات درس:

ریاضی

فصل هفتم

مقطع تحصیلی:

دوره اول متوسطه

پایه:

هشتم

تهیه و تنظیم:

مرکز تحقیقات مهندسی ثمین

ریاضی هشتم- فصل هفتم- توان و جذر

توان

یادآوری(اعداد توان دار): هرگاه عددی چندبار در خودش ضرب شود، می توانیم آن را به صورت یک عدد توان دار بنویسیم. برای این کار، عدد را نوشته (پایه) و تعداد دفعاتی که عدد در خودش ضرب شده است را در بالا و سمت راست آن می نویسیم (توان).

مثال: هر ضرب را به صورت عدد توان دار بنویسید.

الف) $۷ \times ۷ \times ۷ \times ۷ \times ۷ = ۷^{۵}$

ب) $\frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} = (\frac{۲}{۳})^{۳}$

توجه:

۱) هر عددی به توان یک برسد، برابر با خودش است، مانند:

$۴^{۱} = ۴ \quad , \quad (-۷)^{۱} = -۷$

۲) هر عددی (به غیر از صفر) به توان صفر برسد، حاصل برابر با یک است؛ مانند:

$۸^{۰} = ۱ \quad , \quad (-۱۲)^{۰} = ۱$

۳) عدد یک به هر توانی برسد، حاصل باز هم یک می شود؛ مانند:

$۱^{۲۰۰۰} = ۱ \quad , \quad ۱^{۵۰} = ۱$

۴) هنگامی که یک کسر را به توان می رسانیم، باید حتماً آن را داخل پرانتز بنویسیم در غیر اینصورت، توان فقط برای صورت حساب می شود؛ به عنوان نمونه:

$$\frac{3^2}{5} = \frac{3 \times 3}{5} \qquad \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$$

نکته:

۱) اگر عددی بین صفر و یک باشد، هرچه به توان بزرگ تری برسد، حاصل کوچک تر می شود؛ به عنوان نمونه:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^6 > \left(\frac{3}{5}\right)^{60} \qquad (0/2)^4 < (0/2)^3$$

۲) اگر عددی منفی به توان عددی زوج برسد حاصل عددی مثبت است و اگر به توان عددی فرد برسد حاصل عددی منفی است. به عنوان نمونه:

$$(-4)^4 = (-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4) = +256$$

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

۳) اگر عدد منفی داخل پرانتز نبود، برای محاسبه ی عدد، فقط یک بار علامت منفی را می نویسیم، مانند:

الف) $-3^4 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) = -81$ ب) $-2^3 = -(2 \times 2 \times 2) = -8$

مشاهده می کنید در این حالت، چه توان فرد باشد چه زوج، علامت تغییر نمی کند.

✓ محاسبه ی مقدار یک عبارت توان دار

برای محاسبه مقدار یک عبارت توان‌دار، ابتدا هر یک از اعداد را به توان می رسانیم سپس حاصل را محاسبه می کنیم. به نمونه زیر توجه کنید:

$$۳^{۴} + ۵^{۲} - ۱^{۷} = ۸۱ + ۲۵ - ۱ = ۱۰۵$$

توجه: مجذور (مربع) یک عدد یعنی توان دوم آن عدد و مکعب یک عدد به معنی توان سوم آن عدد است. به مثال های زیر توجه کنید:

۴۹، مجذور ۷ است: $۴۹ = ۷^{۲} =$ مجذور ۷

۰/۰۹، مجذور ۰/۳ است: $۰/۰۹ = (۰/۳)^{۲} =$ مجذور ۰/۳

$\frac{۱}{۸}$ ، مکعب $\frac{۱}{۲}$ است : $\frac{۱}{۸} = (\frac{۱}{۲})^{۳} =$ مکعب $\frac{۱}{۲}$

۱۲۵، مکعب ۵ است : $۱۲۵ = ۵^{۳} =$ مکعب ۵

✓ ضرب عددهای توان دار با پایه های مساوی

در ضرب دو عدد توان‌دار با پایه های مساوی، یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را با هم جمع می کنیم.

$$a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$$

$$(-۲)^{۵} \times (-۲)^{۲} = (-۲)^{۷} \qquad ۳^{۴} \times ۳^{۲} = ۳^{۶}$$

✓ ضرب عددهای توان دار با توان های مساوی

در ضرب دو عدد تواندار با توان های مساوی، یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم.

$$a^{m} \times b^{m} = (a \times b)^{m}$$

$$3^{4} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{4} = \left(3 \times \frac{1}{8}\right)^{4} = \left(\frac{3}{8}\right)^{4} \qquad 5^{7} \times 2^{7} = (5 \times 2)^{7} = 10^{7}$$

مثال: حاصل هر عبارت را به صورت عدد توان دار بنویسید.

الف) $\left(\frac{3}{4}\right)^{7} \times (0/75)^{6} \times 20^{13} \xlongequal{0/75=\frac{3}{4}} \left(\frac{3}{4}\right)^{7} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{6} \times 20^{13} = \left(\frac{3}{4}\right)^{13} \times 20^{13} = \left(\frac{3}{\cancel{4}_{1}} \times \frac{\cancel{20}^{5}}{1}\right)^{13} = 15^{13}$

ب) $\left(\frac{3}{5}\right)^{3} \times \frac{1}{5^{3}} \times 25^{3} \xlongequal{\frac{1}{5^{3}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{3}} \left(\frac{3}{5}\right)^{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{3} \times 25^{3} = \left(\frac{3}{\cancel{5}_{1}} \times \frac{1}{\cancel{5}_{1}} \times \frac{\cancel{25}^{1}}{1}\right)^{3} = 3^{3}$

نکته: در صورتی که چند عدد توان دار یکسان با هم جمع شده باشند، می توانیم تعداد آن ها را در یکی از آن ها ضرب کنیم؛ به مثال های زیر توجه کنید:

$3^{6} + 3^{6} + 3^{6}$ تا

$5^{9} + 5^{9} + 5^{9} + 5^{9} + 5^{9}$ تا

✓ به توان رساندن یک عدد توان دار

اگر یک عدد توان دار به توان برسد، پایه را نوشته و توان ها را در هم ضرب می کنیم.

$$(a^{m})^{n} = a^{m \times n}$$

$$(۳^۵)^۷ = ۳^{۵\times۷} = ۳^{۳۵}$$

مثال: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $(۳^۳)^۶ + ۵^۰ - ۱^۴ = ۳^{۱۸} + ۱ - ۱ = ۳^{۱۸}$

ب) $(۲^۳)^۲ + (۳^۴)^۰ = ۲^۶ + ۳^۰ = ۶۴ + ۱ = ۶۵$

نکته: می توان ظاهر برخی اعداد توان دار را عوض کرد. برای این کار، در صورت امکان، ابتدا پایه را تجزیه می کنیم و سپس تجزیه را داخل پرانتز می نویسیم و توان قبلی عدد را بیرون پرانتز می نویسیم؛ به نمونه های زیر توجه کنید:

$$۲۵^۴ = (۵^۲)^۴ = ۵^{۲\times۴} = ۵^۸$$

$$(۲۴)^۵ = (۲^۳ \times ۳^۱)^۵ = ۲^{۳\times۵} \times ۳^{۱\times۵} = ۲^{۱۵} \times ۳^۵$$

تمرین: حاصل هر یک از عبارت های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

الف) $۲۵^۴ \times ۵^۳ =$

ب) $(\frac{۷}{۱۲})^۳ \times (\frac{۸}{۲۱})^۳ =$

ج) $۵^۴ \times ۱۰^۳ \times ۲^۴ =$

د) $(-۵)^۵ \times ۳^۵ =$

ه) $(۳^۵)^۴ \times ۳^۸ =$

پاسخ:

الف) $(۵^۲)^۴ \times ۵^۳ = ۵^۸ \times ۵^۳ = ۵^{۱۱}$

ب) $\left(\frac{\cancelto{۱}{۷}}{\cancelto{۳}{۱۲}} \times \frac{\cancelto{۲}{۸}}{\cancelto{۳}{۲۱}}\right)^۳ = \left(\frac{۲}{۹}\right)^۳$

ج) $(۵^۴ \times ۲^۴) \times ۱۰^۳ = ۱۰^۴ \times ۱۰^۳ = ۱۰^۷$

د) $(-۱۵)^۵$

ه) $۳^{۲۰} \times ۳^{۸} = ۳^{۲۸}$

تمرین: در جاهای خالی عدد مناسب قرار دهید.

الف) $۳^{۱۰} = ۳^{۲} \times ۳^{\boxed{۸}}$ ب) $۶^{۱۵} = (۶^{۳})^{\boxed{۵}}$ پ) $۳^{a+۲} = ۳^{a} \times \boxed{۳}^{\boxed{۲}}$

ت) $۳^{۷} \times \boxed{۴}^{۷} = ۱۲^{۷}$ ث) $۱۸^{۹} = \boxed{۳}^{۹} \times \boxed{۶}^{۹}$ ج) $۲۷^{۴} = ۳^{\boxed{۱۲}}$

دقت کنید که برای قسمت (ث) می توان پاسخ های دیگری نیز در نظر گرفت، در واقع هر دو عددی که حاصل ضرب آنها برابر ۱۸ باشد می تواند پاسخ این سوال باشد.

در مورد قسمت (ج) توجه کنید که:

$$۲۷^{۴} = (۳^{۳})^{۴} = ۳^{۱۲}$$

توجه: در صورتی که در ضرب اعداد توان دار، هیچ کدام از پایه ها و توان ها مساوی نبودند، می توانیم با تغییر ظاهر اعداد، حاصل عبارت را به صورت عدد توان دار بنویسیم.

مثال: حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

الف) $۲۷^{۵} \times ۹^{۲} = (۳^{۳})^{۵} \times (۳^{۲})^{۲} = ۳^{۳\times۵} \times ۳^{۲\times۲} = ۳^{۱۵} \times ۳^{۴} = ۳^{۱۹}$

ب) $۳۲^{۷} \times ۸^{۴} = (۲^{۵})^{۷} \times (۲^{۳})^{۴} = ۲^{۵\times۷} \times ۲^{۳\times۴} = ۲^{۳۵} \times ۲^{۱۲} = ۲^{۴۷}$

تمرین: سی و دو برابر عدد $۲^{۶}$ را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

پاسخ:

۳۲ برابر عدد $۲^{۶}$: $۳۲ \times ۲^{۶} = ۲^{۵} \times ۲^{۶} = ۲^{۱۱}$

تمرین: مکعب و مجذور $۱۰^۲$ را در هم ضرب کرده و حاصل را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$۱۰^۲$: مجذور $(۱۰^۲)^۲ = ۱۰^۴$

$۱۰^۲$ مکعب : $(۱۰^۲)^۳ = ۱۰^۶$

$\Rightarrow$ مکعب $۱۰^۲$

تقسیم اعداد توان دار

✓ تقسیم عدد های توان دار با پایه های مساوی

برای تقسیم دو عدد توان دار با پایه های مساوی، یکی از پایه ها را نوشته و توانِ اولی را منهای توان دومی می کنیم.

$$a^{m} \div a^{n} = a^{m-n}$$

به عنوان نمونه به حاصل عبارات زیر توجه کنید:

$(-۳)^۹ \div (-۳)^۴ = (-۳)^۵$

$۷^۸ \div ۷^۶ = ۷^{۸-۶} = ۷^۲$

$(۲/۵)^۸ \div (\frac{۵}{۲})^۳ = (\frac{۵}{۲})^۵$

$\frac{۵}{۲}$

$x^{۱۱} \div x^۵ = x^{۱۱-۵} = x^۶$

✓ تقسیم عدد های توان دار با توان های مساوی

برای تقسیم دو عدد توان دار با توان های مساوی، پایه اولی را بر پایه دومی تقسیم کرده و یکی از توان ها را می نویسیم:

$$a^{m} \div b^{m} = (\frac{a}{b})^{m}$$

به عنوان نمونه به حاصل عبارات زیر توجه کنید:

$$۱۲^{۸} \div ۶^{۸} = (۱۲ \div ۶)^{۸} = ۲^{۸}$$

$$۵/۶^{۲۰} \div ۷^{۲۰} = (۵/۶ \div ۷)^{۲۰} = ۰/۸^{۲۰}$$

$$x^{۱۵} \div y^{۱۵} = \left(\frac{x}{y}\right)^{۱۵}$$

$$(-۳۹)^{۱۱} \div ۳^{۱۱} = (\frac{-۳۹}{۳})^{۱۱} = (-۱۳)^{۱۱}$$

$$۴^{۷} \div ۱۷^{۷} = (\frac{۴}{۱۷})^{۷}$$

توجه: اگر هم توان ها مساوی باشند و هم پایه ها، حاصل همواره عدد یک است، زیرا تقسیم هر عدد بر خودش، برابر با یک است؛ به عنوان مثال:

$$۵^{۱۱} \div ۵^{۱۱} = ۱$$

$$(۰/۷)^{۳} \div (\frac{۷}{۱۰})^{۳} = ۱$$

نکته: در تقسیم اعداد توان دار هم، می توان از تجزیه ی پایه ها استفاده کرد.

مثال: حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $۶۴^{۵} \div ۱۶^{۶} \xlongequal[۱۶ = ۲^{۴}]{۶۴ = ۲^{۶}} (۲^{۶})^{۵} \div (۲^{۴})^{۶} = ۲^{۳۰} \div ۲^{۲۴} = ۲^{۶}$

ب) $۱۲۵^{۶} \div ۶۴^{۳} \xlongequal[۶۴ = ۲^{۶}]{۱۲۵ = ۵^{۳}} (۵^{۳})^{۶} \div (۲^{۶})^{۳} = ۵^{۱۸} \div ۲^{۱۸} = (\frac{۵}{۲})^{۱۸}$

تمرین: حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

۱) $\frac{(-۳)^{۶۰}}{((۳)^{۵})^{۷}} = \frac{(+۳)^{۶۰}}{۳^{۵\times۷}} = \frac{۳^{۶۰}}{۳^{۳۵}} = ۳^{۶۰} \div ۳^{۳۵} = ۳^{۲۵}$

$$۲)\ (\frac{x^{۱۱}}{x^{۵}})^{۴} \div x^{۵} = (x^{۱۱} \div x^{۵})^{۴} \div x^{۵} = (x^{۶})^{۴} \div x^{۵} = x^{۲۴} \div x^{۵} = x^{۱۹}$$

$$۳)\ \frac{۲۴^{۱۶} \div (-۴)^{۱۶}}{(-۲)^{۵} \times (-۳)^{۵}} = \frac{(-۶)^{۱۶}}{(+۶)^{۵}} = \frac{(+۶)^{۱۶}}{(+۶)^{۵}} = ۶^{۱۶} \div ۶^{۵} = ۶^{۱۱}$$

$$۴)\ \frac{(-۱۲۵)^{۱۶} \div (-۵)^{۱۶}}{۵^{۷} \times ۵^{۷}} = \frac{۲۵^{۱۶}}{۲۵^{۷}} = ۲۵^{۱۶} \div ۲۵^{۷} = ۲۵^{۹}$$

$$۵)\ \frac{(۶^{۴})^{۱۳} \div (۶^{۲})^{۱۱}}{(۲^{۵} \times ۳^{۵}) \div ۶^{۲}} = \frac{۶^{۵۲} \div ۶^{۲۲}}{۶^{۵} \div ۶^{۲}} = \frac{۶^{۳۰}}{۶^{۳}} = ۶^{۳۰} \div ۶^{۳} = ۶^{۲۷}$$

$$۶)\ \frac{۵^{۱۹} \times ۵^{۱۷}}{(۵^{۳})^{۴} \times ۵^{۸}} = \frac{۵^{۳۶}}{۵^{۱۲} \times ۵^{۸}} = \frac{۵^{۳۶}}{۵^{۲۰}} = ۵^{۱۶}$$

$$۷)\ \frac{a^{۱۱} \times b^{۸}}{a^{۶} \times b^{۱۳}} \quad \frac{a^{۱۱} \div a^{۶} = a^{۵}}{b^{۱۳} \div b^{۸} = b^{۵}} \quad \frac{a^{۵}}{b^{۵}} = (\frac{a}{b})^{۵}$$

$$۸)\ \frac{۷^{۱۹} \times ۵^{۱۱}}{۷^{۳۰} \times ۵^{۲۲}} \quad \frac{۷^{۳۰} \div ۷^{۱۹} = ۷^{۱۱}}{۵^{۲۲} \div ۵^{۱۱} = ۵^{۱۱}} \quad \frac{۱}{۷^{۱۱} \times ۵^{۱۱}} = \frac{۱}{۳۵^{۱۱}} = (\frac{۱}{۳۵})^{۱۱}$$

جذر تقریبی

یادآوری (مفهوم ریشه ی دوم و جذر)

برای بدست آوردن ریشه دوم عددx ، به دنبال عددی هستیم که اگر در خودش ضرب شود (به توان ۲ برسد) حاصل آن برابر با x باشد. مثلا ریشه های دوم عدد ۳۶عبارتند از ۶ و ۶- ، زیرا $۳۶ = (-۶)^۲ = ۶^۲$ است.

هر عدد مثبت دارای ۲ ریشه دوم است؛ که قرینه یکدیگرند. ریشه ی دوم مثبت یک عدد را با علامت $\sqrt{}$ (رادیکال) نشان می دهیم و به آن جذر آن عدد نیز می گوییم. به عبارت دیگر می توان گفت، ریشه های دوم عدد x عبارتند از:

$$\sqrt{x} \quad و \quad -\sqrt{x}$$

مثال: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$(-\sqrt{۴۹}+\sqrt{۸۱})\times(\sqrt{۱۴۴}\div(-\sqrt{۳۶}))$$

$$-\sqrt{۴۹}=-۷ \quad , \quad \sqrt{۸۱}=۹ \quad , \quad \sqrt{۱۴۴}=۱۲ \quad , \quad -\sqrt{۳۶}=-۶$$

$$\Rightarrow \left(-\sqrt{۴۹}+\sqrt{۸۱}\right)\times\left(\sqrt{۱۴۴}\div\left(-\sqrt{۳۶}\right)\right)=(-۷+۹)\times(۱۲\div(-۶)) = ۲\times(-۲)$$
$$= -۴$$

توجه:

۱) ریشه ی دوم اعداد صفر و یک، با خودشان برابر است:

$$\sqrt{۰}=۰ \qquad\qquad \sqrt{۱}=۱$$

۲) اعداد منفی، ریشه ی دوم ندارند.

✓ محاسبه جذر تقریبی

تمامی اعداد جذر دقیق ندارند، مانند عدد ۱۸. به این معنی نمی توانیم عدد صحیحی را پیدا کنیم که به توان ۲ برابر با ۱۸ باشد. برای این اعداد سعی می کنیم تا به طور تقریبی جذر آنها را بدست آوریم. برای محاسبه جذر تقریبی عددمثبتی مانند ۱۸ ابتدا باید دو عدد مربع کامل قبل و بعد از ۱۸ را پیدا کنیم. برای عدد ۱۸ این دو عدد عبارتند از ۱۶ و ۲۵، بنابراین داریم:

$$16 < 18 < 25 \Rightarrow \sqrt{16} < \sqrt{18} < \sqrt{25} \Rightarrow 4 < \sqrt{18} < 5$$

حال که حدود $\sqrt{18}$ مشخص شد، عدد وسط ۴ و ۵ یعنی عدد ۴/۵ را در نظر می گیریم، چون $(4/5)^2 = 20/25$، پس مجذور ۴/۵ از ۱۸ بیشتر است و در نتیجه $\sqrt{18}$ از ۴/۵ کم تر است. پس مجذور اعداد ۴/۱ و ۴/۲و ... را بدست می آوریم و جدولی تشکیل می دهیم تا نزدیکترین مجذور به عدد ۱۸ را بدست آوریم.

۴/۳	۴/۲	۴/۱	عدد
۱۸/۴۹	۱۷/۶۴	۱۶/۱۸	مجذور

$$\sqrt{18} \simeq 4/2$$

مثال: $\sqrt{46}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

$$36 < 46 < 49 \Longrightarrow \sqrt{36} < \sqrt{46} < \sqrt{49} \Rightarrow 6 < \sqrt{46} < 7 \Rightarrow$$ بین ۶ و ۷

مثال: جذر تقریبی ۵۲ را تا یک رقم اعشار به دست آورید.

پاسخ: با توجه به این که $\sqrt{64} > \sqrt{52} > \sqrt{49}$ یعنی $8 > \sqrt{52} > 7$ است، پس ۷/۵ را که وسط ۷ و ۸ است در نظر می گیریم. مجذور ۷/۵ برابر است با $(7/5)^2 = 56/25$ در نتیجه $\sqrt{52}$ از ۷/۵ کم تر است. با کامل کردن جدول زیر $\sqrt{52}$ را حساب می کنیم.

عدد	۷/۱	۷/۲	7/3
مجذور	۵۰/۴۱	۵۱/۸۴	53/29

$$\sqrt{۵۲} \simeq ۷/۲$$

تمرین: مساحت دایره ای ۱۶۵ است. اگر $\pi = ۳$ ، شعاع آن چه قدر است؟

پاسخ: اگر شعاع را R فرض کنیم، داریم:

$$\text{مساحت دایره} = R \times R \times \pi = R^{۲} \times ۳ = ۱۶۵ \Rightarrow R^{۲} = ۱۶۵ \div ۳ = ۵۵$$

یعنی برای به دست آوردن شعاع، باید جذر تقریبی ۵۵ را حساب کنیم. می توانیم با استفاده از ماشین حساب، جذر تقریبی ۵۵ را حساب کنیم. $\sqrt{۵۵} \simeq ۷/۴$

تمرین: مشخص کنید $-\sqrt{۶۹}$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد.

پاسخ: اعدادی که قبل و بعد از ۶۹ جذر دقیق دارند، اعداد ۶۴ و ۸۱ هستند، پس:

$$\sqrt{۶۴} < \sqrt{۶۹} < \sqrt{۸۱} \Rightarrow ۸ < \sqrt{۶۹} < ۹$$

اما چون ما $-\sqrt{۶۹}$ را می خواهیم، بنابراین:

$$-۹ < -\sqrt{۶۹} < -۸$$

تمرین: اعداد مقابل را از کوچک به بزرگ بنویسید.

$$(۵/۲)^{۲} \quad , \quad (-۲/۵)^{۲} \quad , \quad -\sqrt{۸۱} \quad , \quad \sqrt{۱۷۰}$$

پاسخ:

$$(۵/۲)^۲ = ۲۷/۰۴\,,\;\; (-۲/۵)^۲ = ۶/۲۵\;\;,\;\; -\sqrt{۸۱} = -۹\;\;,\;\; \sqrt{۱۷۰} \simeq ۱۳/۰۳ \Rightarrow$$

$$-\sqrt{۸۱} < (-۲/۵)^۲ < \sqrt{۱۷۰} < (۵/۲)^۲$$

نکته: اگر رادیکال (ریشه ی دوم) را به توان ۲ برسانیم، رادیکال از بین می رود؛ به نمونه های زیر توجه کنید:

$$(\sqrt{۵})^۲ = ۵ \qquad\qquad (\sqrt{۲})^۲ = ۲$$

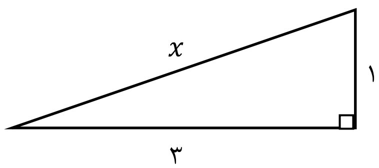
نمایش اعدا رادیکالی روی محور اعداد

با توجه به این که قبلاً رابطه ی فیثاغورس را یاد گرفتیم پس به کمک مثلث قائم الزاویه و استفاده از رابطه ی فیثاغورس می توانیم عددهای رادیکالی را روی محور نمایش دهیم. برای این کار باید مثلث قائم الزاویه ای بسازیم که وتر آن به اندازه ی عدد رادیکالی داده شده باشد، سپس دهانه ی پرگار را به اندازه ی وتر این مثلث باز می کنیم و با کمان زدن روی محور جای عدد رادیکالی مشخص می شود.

توجه: اگر علامت عدد رادیکالی مثبت باشد، در جهت مثبت و اگر منفی باشد در جهت منفی کمان می زنیم.

به یک مثال توجه کنید.

مثال: می خواهیم جای $\sqrt{۱۰}$ را مشخص کنیم. می دانیم که مربع کامل کوچک تر از ۱۰ عدد ۹ است. پس مثلث قائم الزاویه ای در نظر می گیریم که یک ضلع آن ۳ و ضلع دیگر آن ۱ باشد.

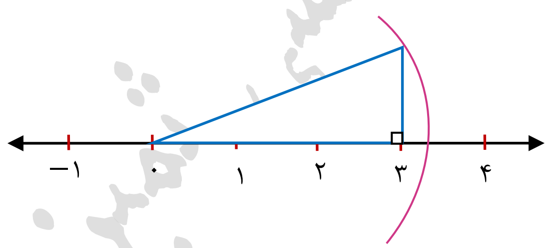


با توجه به رابطه ی فیثاغورس داریم:

$$x^{۲} = ۳^{۲} + ۱^{۲} = ۹ + ۱ = ۱۰ \Rightarrow$$

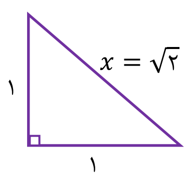
وتر $x = \sqrt{۱۰}$

حال دهانه ی پرگار را به اندازه ی وتر این مثلث باز می کنیم و به مرکز صفر در جهت مثبت، یک کمان می زنیم تا جای $\sqrt{۱۰}$ روی محور مشخص شود.

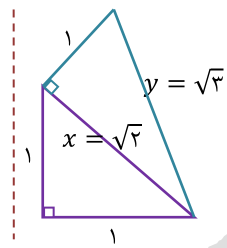


مثال: پاره خط هایی به اندازه های $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt{۳}$ ، $\sqrt{۴}$ و $\sqrt{۵}$ رسم کنید.

پاسخ: دقت کنید در هر مرحله، یک واحد به عدد زیر رادیکال اضافه می شود.



$$x^{۲} = ۱^{۲} + ۱^{۲} = ۱ + ۱ = ۲ \Rightarrow x = \sqrt{۲}$$

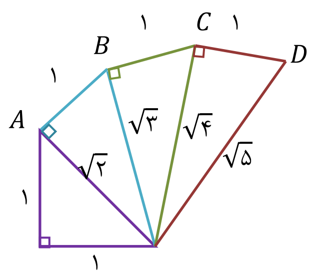


$$x^{۲} = ۱^{۲} + ۱^{۲} = ۱ + ۱ = ۲ \Rightarrow x = \sqrt{۲}$$

$$y^{۲} = x^{۲} + ۱^{۲} = \left(\sqrt{۲}\right)^{۲} + ۱^{۲} = ۲ + ۱ = ۳$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{۳}$$

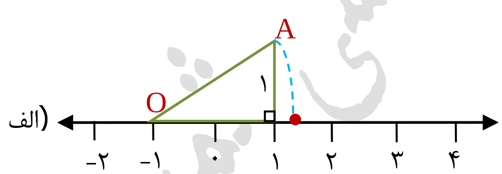
به همین ترتیب:



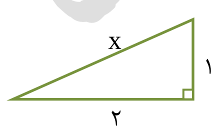
$$\Rightarrow OA = \sqrt{۲} \;,\; OB = \sqrt{۳} \;,\; OC = \sqrt{۴} \;,\; OD = \sqrt{۵}$$

توجه: اگر به جای نقطه ی صفر، از نقطه ای دیگر کمان بزنیم، آن عدد به اندازه ی کمان اضافه می شود.

مثال: در هر شکل، نقطه ی مشخص شده ی روی محور، چه عددی را نشان می دهد؟

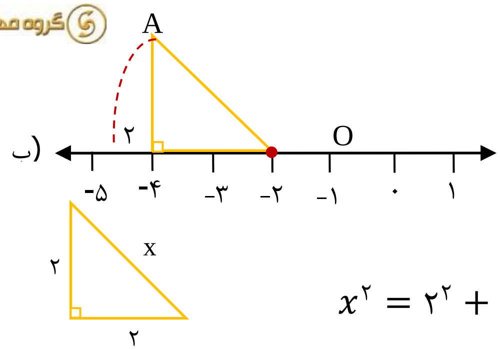


در شکل (الف)، OA عدد $\sqrt{۵}$ را نشان می دهد:



$$x^{۲} = ۲^{۲} + ۱^{۲} = ۴ + ۱ = ۵ \Rightarrow x = \sqrt{۵}$$

چون به سمت مثبت ها کمان زده ایم، پس $+\sqrt{۵}$ را نشان می دهد. در این شکل، چون از نقطه ۱- شروع کرده ایم، پس نقطه روی محور، عدد $-۱ + \sqrt{۵}$ را نشان می دهد.



در شکل (ب)، OA برابر $\sqrt{۸}$ است:

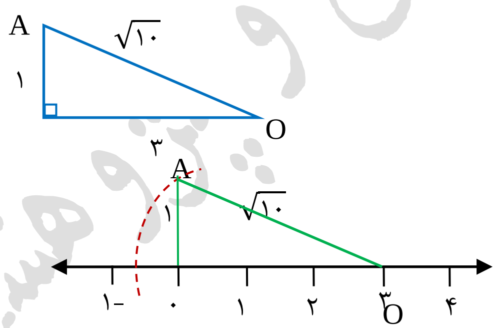
$$x^{۲} = ۲^{۲} + ۲^{۲} = ۴ + ۴ = ۸ \Rightarrow x = \sqrt{۸}$$

و چون به سمت منفی ها کمان زده ایم، پس $-\sqrt{۸}$ را نشان می دهد. در این شکل، چون از نقطه ی ۲- شروع کرده ایم پس نقطه ی روی محور، $-۲ - \sqrt{۸}$ را نشان می دهد.

نکته: اگر رادیکال مورد نظر با عدد صحیح، جمع یا تفریق شده بود، برای نمایش آن روی محور، ابتدا یک

پاره‌خط به اندازه ی رادیکال داده شده رسم می کنیم، سپس از نقطه ای که عدد نوشته شده در کنار رادیکال را نشان می دهد، کمان می زنیم.

مثال: عدد $\sqrt{۱۰} - ۳$ را روی محور نمایش دهید.



ابتدا یک پاره خط به اندازه $\sqrt{۱۰}$ رسم می کنیم. اکنون چون $\sqrt{۱۰} - ۳$ را می خواهیم نمایش دهیم، از نقطه ۳ به اندازه ی OA کمان می زنیم و چون علامت $\sqrt{۱۰}$ منفی است، به سمت منفی ها کمان می زنیم.

خواص ضرب وتقسیم رادیکال ها

اگر بین دو عدد رادیکالی علامت ضرب یا تقسیم باشد می توانیم آن ها را زیر یک رادیکال بنویسیم.

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (b \neq ۰)$$

با استفاده از روابط فوق، اگر دو عدد در زیر یک رادیکال باشند و بین آن ها علامت ضرب یا تقسیم باشد نیز می توانیم آن ها را از هم جدا می کنیم.

توجه: خاصیت فوق برای جمع و تفریق رادیکال ها برقرار نیست. به عبارتی در حالت کلی:

$$\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$$

به عنوان مثال:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{۶۴} + \sqrt{۳۶} = ۸ + ۶ = ۱۴ \\ \sqrt{۶۴ + ۳۶} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{۶۴} + \sqrt{۳۶} \neq \sqrt{۶۴ + ۳۶}$$

نکته:

۱. اگر دو عدد در زیر یک رادیکال باشند و بین آن ها علامت جمع یا تفریق باشد باید ابتدا حاصل جمع یا تفریق را به دست آوریم و سپس جذر بگیریم. به عنوان نمونه:

$$\sqrt{۲۵ - ۱۶} = \sqrt{۹} = ۳$$

۲. بعضی از رادیکال ها را می توانیم به صورت ساده تر بنویسیم به این ترتیب که عدد زیر رادیکال را به صورت ضرب دو عدد بنویسیم به طوری که یکی از آن ها جذر دقیق داشته باشد. به عنوان مثال:

$$\sqrt{۱۸} = \sqrt{۲ \times ۹} = \sqrt{۹} \times \sqrt{۲} = ۳\sqrt{۲} \qquad \sqrt{۵۰} = \sqrt{۲۵ \times ۲} = \sqrt{۲۵} \times \sqrt{۲} = ۵\sqrt{۲}$$

تمرین: حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

۱) $\sqrt{۴۰} = \sqrt{۴ \times ۱۰} = \sqrt{۴} \times \sqrt{۱۰} = ۲\sqrt{۱۰}$

۲) $\sqrt{۲} \times \sqrt{۸} = \sqrt{۲ \times ۸} = \sqrt{۱۶} = ۴$

۳) $\sqrt{۰/۱} \times \sqrt{۰/۴} = \sqrt{۰/۱ \times ۰/۴} = \sqrt{۰/۰۴} = ۰/۲$

۴) $\sqrt{۱۰۰ \times ۳۶} = \sqrt{۱۰۰} \times \sqrt{۳۶} = ۱۰ \times ۶ = ۶۰$

۵) $\dfrac{\sqrt{۴۸}}{\sqrt{۳}} = \sqrt{\dfrac{۴۸}{۳}} = \sqrt{۱۶} = ۴$

۶) $\sqrt{۱/۲۱ \times ۴۹ \times ۸۱} = \sqrt{۱/۲۱} \times \sqrt{۴۹} \times \sqrt{۸۱} = ۱/۱ \times ۷ \times ۹ = ۶۹/۳$

۷) $\sqrt{\dfrac{۰/۰۹}{۴۹}} = \dfrac{\sqrt{۰/۰۹}}{\sqrt{۴۹}} = \dfrac{۰/۳}{۷}$

۸) $\sqrt{۸۱ + ۱۴۴} = \sqrt{۲۲۵} = ۱۵$