

## هندسه (۳)

فصل سوم

مقطع تحصیلی:

دوره دوم متوسطه

پایه:

دوازدهم ریاضی فیزیک

تهیه و تنظیم:

مرکز تحقیقات مهندسی ثمین

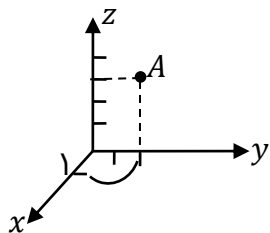
تمامی حقوق این اثر برای مرکز تحقیقات ثمین محفوظ می باشد.

### فصل ۳- درس ۱- معرفی فضای $R^3$

۱- نقطه  $A(1, 2, 3)$  را در دستگاه مختصات رسم کنید.

حل: برای مشخص کردن نقطه  $A$  در دستگاه مختصات به اندازه  $y$  و  $x$  روی محور  $X$  و  $Y$  جدا می کنیم و

سپس به اندازه  $z$  در روی محور  $Z$  جدا می کنیم.



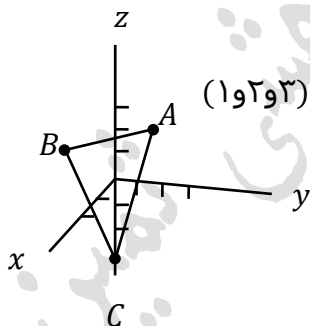
$$A(x \text{ و } y \text{ و } z) = (1, 2, 3)$$

۲- مثلث  $ABC$  را با مختصات زیر رسم کنید.

$$A(1, 2, 3) \text{ و } B(1, -2, 1) \text{ و } C(2, 3, -2)$$

حل: با داشتن این ۳ نقطه می توان مثلث  $ABC$  را رسم کرد که اگر آن را گسترش دهیم به یک صفحه می

رسیم.



۳- فاصله قرینه نقطه  $A(1, 2, 3)$  نسبت به محور  $X$  از تصویر نقطه  $B(2, -1, 4)$  روی صفحه  $xy$  کدام

است؟

حل: ابتدا قرینه نقطه  $A$  را نسبت به محور  $X$  به دست می آوریم و به نقطه  $A'$  می رسیم سپس تصویر نقطه

$B$  را روی صفحه  $xy$  به دست می آوریم و به نقطه  $B'$  می رسیم در نهایت فاصله  $A'$  تا  $B'$  را می یابیم.

$$x \text{ قرینه } A \text{ نسبت به } \rightarrow (1 - 2 - 3) = A'$$

$$xy \text{ تصویر } B \text{ نسبت به } \rightarrow (2 - 1 - 0) = B'$$

فاصله  $A'$  تا  $B'$  ←

$$|A'B'| = \sqrt{(x_{A'} - x_{B'})^2 + (y_{A'} - y_{B'})^2 + (z_{A'} - z_{B'})^2}$$

$$\sqrt{(2 - 1)^2 + (-1 + 2)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11}$$

۴- فاصله تصویر نقطه  $A(2, 3, 4)$  روی محور  $x$  از قرینه  $A$  نسبت به صفحه  $xy$  کدام است؟

حل: ابتدا تصویر نقطه  $A$  روی محور  $x$  را به دست می آوریم و به  $A'$  می رسم سپس قرینه  $A$  نسبت به صفحه  $xy$  را به دست می آوریم و به  $B$  می رسم. در نهایت فاصله  $A'$  تا  $B$  را می یابیم.

$$x \text{ روی } A \text{ تصویر } \rightarrow (2, 0, 0) = A'$$

$$xy \text{ نسبت به } A \text{ قرینه } \rightarrow (2, 3, -4) = B$$

$$|A'B| = \sqrt{(2 - 2)^2 + (3 - 0)^2 + (-4 - 0)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

۵- فاصله دو نقطه  $A(1, -1)$  و  $B(3, 4)$  را از یکدیگر بیابید.

حل: فرمول آن به صورت زیر است با جایگذاری آن را بدست می آوریم.

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(1 - 3)^2 + (-1 - 4)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

۶- فاصله نقطه  $A(1, 2)$  از محور  $y$  ها را بیابید؟

حل: فاصله نقطه  $A(\alpha, \beta)$  از محور  $y$  ها برابر با  $\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}$  است.

$$\text{فاصله } A \text{ از } y \text{ ها} = \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

۷- مختصات وسط پاره خط AB را بیابید.

$$A(1, 2, 3)$$

$$B(3, 4, 5)$$

حل: برای پیدا کردن مختصات وسط پاره خط AB از فرمول زیر حل می کنیم. اگر مختصات نقطه وسط آن M باشد.

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = M(2, 3, 4)$$

۸- مرکز ثقل مثلث ABC را بیابید.

اگر  $A(-1, 3, 0)$  و  $B(3, 1, 3)$  و  $C(1, 2, 0)$  باشد.

حل: مرکز ثقل مثلث ABC محل برخورد میانه های مثلث است و مختصات مرکز ثقل به صورت زیر است:

$$C = \frac{A + B + C}{3} = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

با جایگذاری مختصات نقاط A, B, C مرکز ثقل مثلث را می یابیم.

$$C = \left(\frac{-1+3+1}{3}, \frac{3+1+2}{3}, \frac{0+3+0}{3}\right) = (1, 2, 1)$$

۹- اگر  $A(1, -1, 2)$  و  $B(0, 3, 1)$  و  $C(-1, -2, 2)$  سه رأس متوازی الاضلاع ABCD باشد مختصات رأس D را بیابید.

حل: بین رئوس متوازی الاضلاع رابطه  $A+C=B+D$  برقرار است.

پس با جایگذاری در رابطه بالا به مختصات رأس  $D$  می رسیم.

$$(10 - 102) + (-1 - 202) = (0301) + (x0y0z)$$

$$(0 - 304) - (0301) = (x0y0z)$$

$$(x0y0z) = (0 - 603)$$

۱۰- طول بردار  $OA$  را بیابید که ابتدایش مبدأ مختصات و انتهایش  $A(40302)$  باشد.

حل: فرمول طول بردار مانند فاصله دو نقطه است. حال چون ابتدای بردار مبدأ است پس فرمول آن به صورت

زیر است:

$$\sqrt{(4 - 0)^2 + (3 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{29}$$

۱۱- اگر دو بردار  $\vec{A}(102 - 102)$  و  $\vec{B}(x - 103 - 2y)$  موازی باشند  $xy$  را بیابید.

حل: در صورتی دو بردار موازی هستند که یکی از بردارها مضرب بردار دیگر باشد.

اگر  $A(x_A, y_A, z_A)$  و  $B(x_B, y_B, z_B)$  دو بردار موازی باشند. آن گاه رابطه زیر برقرار است.

$$\frac{x_A}{x_B} = \frac{y_A}{y_B} = \frac{z_A}{z_B}$$

پس با جایگذاری مختصات دو بردار در رابطه بالا مقدار  $x, y$  را پیدا کرده و در نهایت در هم ضرب می کنیم.

$$\frac{1}{x-1} = \frac{-1}{3} = \frac{2}{-2y} \Rightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{-1}{3} \quad 3 = 1-x \Rightarrow x = -2$$

$$\frac{-1}{3} = \frac{2}{-2y} \Rightarrow 6 = 2y \Rightarrow y = 3$$

$$xy = -2 \times 3 = -6$$

۱۲- حاصل  $\vec{AO} + \vec{AB} + \vec{OB}$  کدام است؟

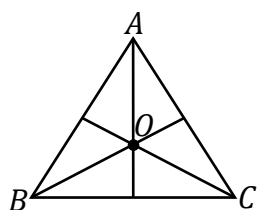
حل: ابتدا بردارها را مرتب می کنیم که  $AB + BC = AC$  است.

حال با مرتب کردن بردار بالا به  $2\vec{AB}$  می رسم.

$$\vec{AO} + \vec{AB} + \vec{OB} = \underbrace{\vec{AO} + \vec{OB}}_{\vec{AB}} + \vec{AB} = \vec{AB} + \vec{AB} = 2\vec{AB}$$

۱۳- در مثلث ABC نقطه O مرکز مثلث (محل برخورد میانه ها) است. حاصل  $\vec{OA} + \vec{OB}$  را بیابید.

حل: نقطه O مرکز ثقل مثلث ABC است پس برآیند نیروهای وارد بر O صفر است.



$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$$

$$\vec{OA} + \vec{OB} = -\vec{OC} = \vec{CO}$$

۱۴- اگر  $\vec{A} = (1, 2, -1)$  و  $\vec{B} = 2i - j + 3k$  باشد آنگاه اندازه  $2\vec{A} + \vec{B}$  را بیابید.

حل: ابتدا بردار  $2\vec{A}$  را به دست می آوریم و سپس با بردار  $\vec{B}$  جمع می کنیم در نهایت طول بردار به دست آورده را محاسبه می کنیم.

$$2\vec{A} = 2(1, 2, -1) = (2, 4, -2)$$

$$\vec{B} = (2, -1, 3)$$

$$2\vec{A} + \vec{B} = (2, 4, -2) + (2, -1, 3) = (4, 1, 1)$$

$$|2\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{(4)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \sqrt{18}$$

۱۵- اگر طول قطرهای متوازی الاضلاع ۴ و ۲ باشد و اگر طول ضلع a برابر ۱ باشد طول b را بیابید.

حل: بین قطرها و اضلاع متوازی الاضلاع رابطه زیر برقرار است.

حال

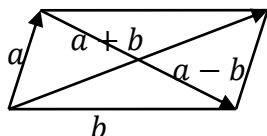
$$|a - b|^2 + |a + b|^2 = 2(a^2 + b^2) \quad |a + b| = 4 \text{ و } |a - b| = 2$$

$$|b| = ? \text{ و } |a| = 1$$

$$(2)^2 + (4)^2 = 2(1 + b^2)$$

$$4 + 16 = 2(1 + b^2) \quad 20 + 2(1 + b^2) \quad 10 = 1 + b^2$$

$$b = 3$$



۱۶) اگر زاویه بین دو ضلع متوازی الاضلاع ۶۰ درجه باشد و اضلاع آن ۳ و ۵ باشد آنگاه طول قطر بزرگ متوازی الاضلاع را بیابید.

حل: بین اضلاع متوازی الاضلاع و زاویه بین آن ها رابطه زیر برقرار است.

$$\cos 60 = \frac{1}{2} \quad |b| = 5 \text{ و } |a| = 3$$

$$|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos \alpha$$

$$|a + b|^2 = 25 + 9 + 2 \times 3 \times 5 \times \frac{1}{2}$$

$$34 + 15 = 49$$

$$|a + b| = 7$$