

آمار و احتمال

فصل اول

مقطع تحصیلی:

دوره دوم متوسطه

پایه:

یازدهم ریاضی فیزیک

تهیه و تنظیم:

مرکز تحقیقات مهندسی ثمین

تمامی حقوق این اثر برای مرکز تحقیقات ثمین محفوظ می باشد.

فصل اول : آشنایی با مبانی ریاضیات

فصل ۱- درس ۱- منطق ریاضی

۱- کدام گزینه گزاره است؟

الف) ۲ عددی اول است. ب) هوا سرد است.

ج) چه هوای تمیزی د) به ازای هر x ، $2x$ زوج است.

پاسخ:

به جمله های خبری که درست یا نادرست هستند گزاره می گوئیم و به درستی و نادرستی آن کاری نداریم. پس الف و ب گزاره هستند.

🔔 نکته: جمله های امری و عاطفی و سؤالی گزاره نیستند.

پس ج گزاره نیست.

🔔 نکته: جملاتی که در مورد مجموعه معینی صحبت می کند به ازای هر x ممکن است درست باشد یا

نباشد، گزاره است.

پس «دو» نیز گزاره است.

۲- کدام گزینه گزاره نما است؟

الف) به ازای هر x ، $2x$ زوج است. ب) هوا سرد است.

ج) ۳ عددی فرد است. د) $x^2 + 1 = 2$

پاسخ:

🔔 نکته: در گزاره نما به خودی خود نمی شود گفت درست است یا نادرست، وقتی به جای متغیر مقدار

دهیم می شود گزاره و می توان در مورد ارزش آن صحبت کرد.

پس «د» گزاره نما است زیرا با جایگذاری می توان فهمید عبارت درست است یا نه.

۳- در گزاره نمای $x^3 - 2x^2 + x = 0$ ، دامنه گزاره نما و مجموعه جواب گزاره نما را به دست آورید.

پاسخ:

دامنه گزاره نما برابر $D = R$ است.

دامنه چند جمله ای بالا، تمام اعداد حقیقی است.

❖ نکته: گزاره نما به مجموعه ای از اعضای دامنه متغیرها گفته می شود که گزاره نما به گزاره ای درست

تبدیل شود.

$$S = x(x^2 - 2x + 1) = 0 \rightarrow x(x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 0, 1$$

$$D = R, S = \{0, 1\}$$

۴- اگر دو گزاره qp ، به صورت زیر باشد $p \vee \sim q$ را بنویسید.

p : زهرا به مدرسه رفت.

q : باران بارید.

پاسخ:

\vee نشانه «یا» است و

$\sim p$: زهرا به مدرسه نرفت.

$\sim q$: باران نبارید.

$\sim p \vee \sim q$: زهرا به مدرسه نرفت یا باران نبارید.

۵- اگر یک سطر جدول ارزش گزاره ها به صورت « $T T f$ » باشد این گزاره چند سطر دارد؟

پاسخ:

این جدول در هر سطر ۳ گزاره دارد پس 2^3 سطر دارد این جدول ۸ سطر دارد.

۶- جدول ارزش گزاره $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$ را رسم کنید.

T : درست بودن f : غلط بودن

پاسخ:

برای هر گزاره باید یک ستون قرار داد و در ۲ ستون اول حالت p, q قرار می گیرد.

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$
T	F	T	T	F	F	F	F
T	T	F	F	T	F	F	F
F	F	T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	T	T	T	T

$\sim q$: یعنی نقیض هر سطر ستون دوم به ازای f و T و به ازای T و f است.

$p \wedge \sim q$: یعنی $\sim q$ و p را \wedge می کنیم. جاهایی که هر دو درست هستند درست می شود.

$\sim(p \wedge \sim q)$: یعنی ستون چهارم را به ازای هر گزاره نقیض کن.

$\sim p \wedge q$: یعنی q و $\sim p$ را \wedge می گیریم اگر هر دو درست باشند ارزش گزاره درست است. در غیر

اینصورت نادرست است.

$\sim(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ ← حال \vee را بین ستون ۵ و ۷ می گیریم.

۷- کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر $۵ = ۳ + ۱$ باشد آنگاه ۴ مربع کامل است.

(۲) اگر ۰ عددی فرد باشد آن گاه ۱ زوج است.

(۳) اگر ۲ عددی زوج باشد آن گاه ۲×۲ زوج است.

(۴) اگر $۲k + ۱$ فرد باشد آن گاه $۲k$ زوج است.

پاسخ:

در ترکیب شرطی زمانی یک گزاره نادرست است که فرض درست و حکم نادرست باشد.

(۱) $F \rightarrow T$ پس گزاره درست است.

(۲) $F \rightarrow F$ پس گزاره درست است.

(۳) $T \rightarrow T$ پس گزاره درست است.

(۴) $T \rightarrow F$ پس گزاره نادرست است.

۸- گزاره $(p \Rightarrow \sim q) \wedge (q \Rightarrow p)$ هم ارز چه عبارتی است؟

پاسخ:

با توجه به هم ارزی $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ عبارت را ساده می کنیم.

$$(p \Rightarrow \sim q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim q \vee p)$$

$$\sim q \vee (\sim p \wedge p) \equiv \sim q \vee F \equiv \sim q$$

۹- نقیض گزاره «اگر $x = 2$ باشد، آن گاه $3x = 6$ می شود» را بیابید.

پاسخ:

p : اگر $x = 2$ باشد و q : $3x = 6$ است.

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) = p \wedge \sim q$$

$$x = 2 \text{ باشد و } 3x \neq 6$$

۱۰- نقیض گزاره $(2x = 4) \wedge (3x = 6) \Leftrightarrow x = 2$ را بیابید.

پاسخ:

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

با توجه به نکته روبرو

$$\sim (x = 2) \Leftrightarrow (2x = 4) \wedge (3x = 6)$$

$$\equiv x \neq 2 \Leftrightarrow (2x = 4) \wedge (3x = 6)$$

۱۱- هر گاه $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x < 4\}$ دامنه متغیرها باشد. ارزش کدام سور نادرست است؟

الف) $\forall x \in A: x + 2 \geq 3$

ب) $\exists x \in A: x + 2 = 5$

ج) $\forall x \in A: -2x \geq -9$

د) $\forall x \in A: x^2 \geq x$

پاسخ:

الف) $0 \leq x < 4 \leftarrow 0 \leq x + 2 < 6$ پس ارزش سور نادرست است.

ب) به ازای $x = 3$ ، $x + 2 = 5$ می شود که ۳ در دامنه است و ارزش سور درست است.

ج) $0 \leq x \leq 4 \leftarrow -8 \leq -2x < 0$ پس ارزش سور درست است.

د) به ازای هر x در بازه $0 \leq x < 4$ ، $x^2 > x$ است پس ارزش سور درست است.

۱۲- نقیض گزاره $\exists x \in \mathbb{R}: (x \leq 0) \vee (x > 1)$ را به دست آورید.

پاسخ:

نقیض سورها به صورت مقابل است:

$$\sim (\forall) = \exists$$

$$\sim (\exists) = \forall$$

$$\sim (\exists x \in \mathbb{R}, (x \leq 0) \vee (x > 1)) \equiv \forall x \in \mathbb{R}: \sim ((x \leq 0) \vee (x > 1))$$

$$\equiv \forall x \in \mathbb{R}: \sim (x \leq \cdot) \wedge \sim (x > \cdot)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \sim (x > \cdot) \wedge (x \leq \cdot)$$

۱۳- کدام سور مثال نقض دارد؟

الف) $\forall x \in \mathbb{R}^+: x + \frac{1}{x} \geq 2$

ب) $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}: \frac{x}{x^2+x} = \frac{1}{x+1}$

ج) $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad x^2 \geq x$

د) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{x^3+x} - x \neq 0$

پاسخ:

سور مثال نقض دارد یعنی غلط است.

الف) به ازای هر $x \in \mathbb{R}^+$ ، $x + \frac{1}{x} \geq 2$ است پس درست است.

ب) $\frac{x}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x+1}$ چون صفر عضو دامنه نبود پس درست است.

ج) به ازای هر $x \in \mathbb{R}^+$ ، $x^2 \geq x$ است.

د) $\sqrt{x^3+x} - x \neq 0$ غلط است. مثال نقض آن عدد صفر است.